Examen 3

Nom : Solutions

1. (*40 points*) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \; dx$

Par parties

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int = -x\cos x - \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

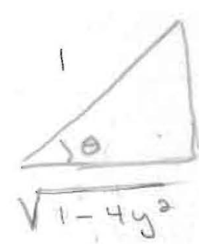
$$= -x\cos x + \sin x \Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - -\sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1$$

$$= \boxed{2}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-4y^2)^{\frac{3}{2}}} \; dy$

S. T.



$\sin\theta = 2y$

$\frac{1}{2}\sin\theta = y$

$dy = \frac{1}{2}\cos\theta \, d\theta$

$$\int = \int \frac{1}{\left(1-4\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2}\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-\sin^2\theta)^{3/2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\cos^2\theta)^{3/2}} \cdot \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\tan\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{1-4y^2}} + C = \boxed{\frac{y}{\sqrt{1-4y^2}} + C}$$

Division

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-4x^2-x-3 & x^2-2x-3 \\ \cline{2-2} -\left(2x^3-4x^2-6x\right) & 2x \\ \hline 5x-3 & \end{array}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx$

$$\int = \int\left[2x + \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)}\right]dx \quad (*)$$

$\underline{\underline{FP}}$ $\dfrac{5x-3}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1} \Rightarrow 5x+3 = A(x+1)+B(x-3)$

si $x=-1 \Rightarrow -8 = B(-4) \Rightarrow \boxed{B=2}$

si $x = 3 \Rightarrow 12 = A(4) \Rightarrow \boxed{A=3}$

$$\Rightarrow * = \int\left[2x + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}\right]dx$$

$$= x^2 + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

(d) $\displaystyle\int \sin^4(3\theta)\,d\theta = \int(\sin^2 3\theta)^2\,d\theta$

$$= \int\left(\frac{1-\cos 6\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 6\theta + \cos^2 6\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\theta - \frac{2}{4}\,\frac{\sin 6\theta}{6} + \frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 12\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\theta - \frac{\sin 6\theta}{12} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\sin 12\theta}{12} + C$$

$$= \frac{3}{8}\theta - \frac{\sin 6\theta}{12} + \frac{\sin 12\theta}{96} + C$$

17 min

2. (*20 points*) Calculer les intégrales suivantes et dire si elles sont convergentes (C) ou divergentes (D).

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

discontinuité en $x = 0$

Int. Impropre

$$\int = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-2/3}\,dx + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{8} x^{-2/3}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^-} 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+} 3x^{1/3}\Big|_{t}^{8}$$

$$= \lim_{t\to 0^-} 3t^{1/3} - 3(-1)^{1/3} + \lim_{t\to 0^+} 3(8)^{1/3} - 3t^{1/3}$$

$$= 0 + 3 + 6 - 0$$

$$= \boxed{9 \text{ d'où } (C)}$$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \lim_{t\to 0^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{1}{2-1}$$

(Résultat vu en classe)

$$= \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{t} + \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_{t}^{1} + 1$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{-1}{t} - \frac{-1}{-2} + \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{1} - -\frac{1}{t} + 1$$

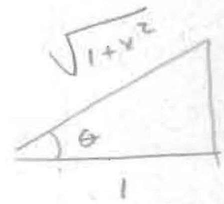
$$= \infty - \frac{1}{2} - 1 + \infty + 1$$

$$= \boxed{\infty \text{ d'où } (D)}$$

3. (*20 points*) Soit la fonction $f(x) = 2 - \dfrac{x^2}{2}$

(a) Calculer la longueur de cette courbe quand x varie de 0 à 2.

$$\ell = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \frac{dy}{dx} = -x$$



$x = \tan\theta$

$dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\ell = \int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

$$= \int_{\text{"}0\text{"}}^{\text{"}2\text{"}} \sqrt{1 + \tan^2\theta}\, \sec^2\theta\, d\theta = \int_{\text{"}0\text{"}}^{\text{"}2\text{"}} \sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big|_{\text{"}0\text{"}}^{\text{"}2\text{"}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+x^2} \cdot x + \ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|\right]_0^2$$

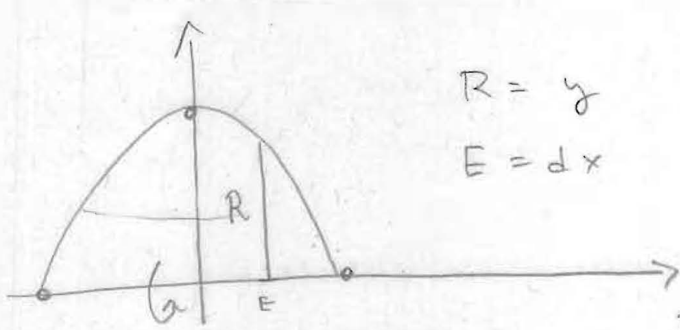
$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln\left|\sqrt{5} + 2\right|\right] \approx 2{,}96\ u$$

(b) Calculer le volume du solide de révolution engendrée par la rotation de la région délimitée par cette courbe et l'axe des x autour de l'axe des x .

$2 - \frac{x^2}{2} = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$



$R = y$

$E = dx$

Disques :

$$V = \int_{-2}^{2} \pi R^2 E = \int_{-2}^{2} \pi (y)^2\, dx$$

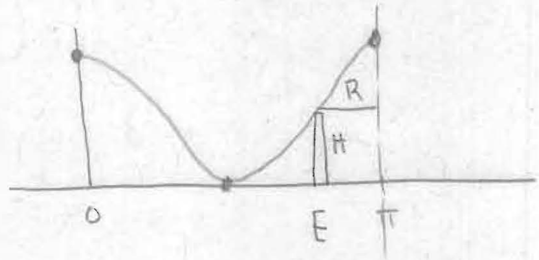
$$= \int_{-2}^{2} \pi \left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} \left[4 - 2x^2 + \frac{x^4}{4}\right] dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{20}\right]_{-2}^{2} = 2\pi\left[4(2) - \frac{2 \cdot 2^3}{3} + \frac{2^5}{20}\right]$$

$$= \frac{128\pi}{15}\ u^3 \approx 26{,}81\ u^3$$

4. (*10 points*) Soit la fonction $f(x) = 1 - \sin x$, SANS LA CALCULER, donner l'intégrale permettant de calculer :

(a) le volume du solide de révolution engendrée par la rotation de la région délimitée par la courbe, l'axe des x, la droite $x = \pi$, autour de l'axe des $x = \pi$.



$R = \pi - x$

$H = y$

$E = dx$

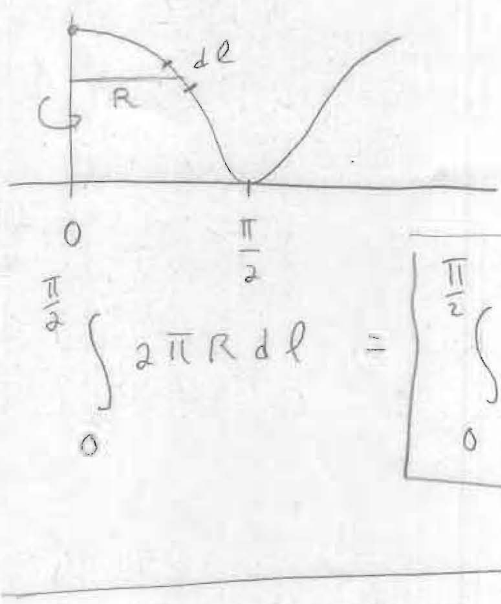
Méthode des tubes

$$V = \int_0^{\pi} 2\pi\,(\pi - x)(1 - \sin x)\,dx$$

(b) l'aire du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe autour de l'axe des y quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

$x = \arcsin(y-1)$

$$d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-(y-1)^2}}\right)^2}\,dy = \sqrt{1 + \frac{1}{2y - y^2}}\,dy$$



$R = x$

$d\ell = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R\,d\ell = \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\, x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx}$$

$$A = \boxed{\int_0^{1} 2\pi \arcsin(y-1) \sqrt{1 + \frac{1}{2y - y^2}}\,dy}$$

Pas mal plus pénible !