Examen 2

Nom : ____

1. (*6 points*) Inconsciente de la consommation d'énergie, une personne laisse couler dans sa baignoire de l'eau à 48°C. Trouvant l'eau trop chaude, elle décide d'attendre que la température de l'eau baisse. Sachant que la température de la pièce est de 22°C, et qu'en 5 minutes la température de l'eau a diminué de 8°C, déterminer le temps que cette personne devra attendre, après avoir laissé couler l'eau, si elle désire prendre son bain à 34°C.

Loi de Refroidissement de Newton $\frac{dT}{dt} = K(T-A)$

$A = 22$

donc $\frac{dT}{T-22} = K\,dt$

$\Rightarrow \int \frac{dT}{T-22} = K\,dt$

$\Rightarrow \ln|T-22| = Kt + C_1$

$T > 22$ $\Rightarrow T - 22 = Ce^{KT}$

$\Rightarrow \boxed{T(t) = Ce^{Kt} + 22}$ 2

$T(0) = 48 \Rightarrow C = 26$

$\Rightarrow T(t) = 26e^{Kt} + 22$

$T(5) = 40$

$\Rightarrow 26e^{5K} + 22 = 40$

$\Rightarrow 5K = \ln\frac{9}{13}$

$\Rightarrow K = \frac{1}{5}\ln\frac{9}{13}$

Donc $T(t) = 26e^{\frac{1}{5}\ln\frac{9}{13}t} + 22$

$\Rightarrow \boxed{T(t) = 26\left(\frac{9}{13}\right)^{t/5} + 22}$ 2

On cherche t_0 tel que

$T(t_0) = 26\left(\frac{9}{13}\right)^{t/5} + 22 = 34$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{13}\right)^{t/5} = \frac{12}{26}$

$\Rightarrow \boxed{t = 10{,}51 \text{ minutes}}$ 2

2. (*4 points*) En supposant que $\int_0^3 f(x)dx = 2$, $\int_0^7 g(x)dx = 8$ et $\int_7^3 f(x)dx = -3$, évaluer :

(a) $\int_2^2 (f(x) + g(x))\,dx$
$= 0$

(b) $\int_0^7 f(x)dx = \int_0^3 + \int_3^7 = 2 - -3 = \boxed{5}$

(c) $\int_0^7 (-f(x) + 3g(x))\,dx$

$= -\int_0^7 f\,dx + 3\int g\,dx$

$= -5 + 3 \times 8$

$= \boxed{19}$

(d) $\int_0^7 (2 + g(x))\,dx = \int_0^7 2\,dx + \int_0^7 g\,dx$

$= 2 \times 7 + 8$

$= \boxed{22}$

3. (*6 points*) Déterminer, parmi la famille de courbes orthogonales à la courbe définie par $f(x) = x^3$ celle qui passe par le point $P(2, 8)$.

$$f(x) = y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \qquad (1)$$

soit y_1 une courbe orthogonale à f alors

$$\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} \cdot 3x^2 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{3x^2} \Rightarrow dy_1 = -\frac{1}{3x^2}\,dx \qquad (1)$$

$$\text{d'où } \int dy_1 = -\frac{1}{3}\int x^{-2}\,dx \Rightarrow y_1(x) = \frac{1}{3x} + C \qquad (2)$$

(famille)

on veut que $y_1(2) = 8$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(2)} + C = 8 \Rightarrow C = \frac{47}{6}$$

D'où $y_1 = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{47}{6} = \boxed{\dfrac{2 + 47x}{6x}}$ est la courbe cherchée. (2)

4. (*6 points*) Évaluer $\int_1^3 (x-1)^2 dx$ en utilisant la définition de l'intégrale définie. Utiliser $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \quad c_i = 1 + \frac{2i}{n} \qquad (1)$$

et donc

$$\int_1^3 (x-1)^2\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \qquad (1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n} - 1\right)^2 \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \qquad (2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{n^3}\,n^2} \cdot \frac{\cancel{n}\,(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}\,3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3n^2}\left(2n^2 + 3\cancel{n}^{\,0} + \cancel{1}^{\,0}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\,u^2 \qquad (2.)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{25} = -\frac{u^{3/2}}{3}\Bigg|_{25}$$

$$= -\left(\frac{9^{3/2}}{3} - \frac{25^{3/2}}{3}\right) = -\left(9 - \frac{125}{3}\right) = \boxed{\frac{98}{3}}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta e^{\sin\theta}\,d\theta.$

$u = \sin\theta$

$du = \cos\theta\, d\theta$

$u(0) = \sin 0 = 0$

$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$= \int_0^1 e^u\,du$$

$$= e^u\Big|_0^1 = \boxed{e - 1}$$

6. (*6 points*) À l'aide de la méthode des trapèze ($n = 4$), calculer approximativement $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{4x+5}}\,dx.$

$$\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

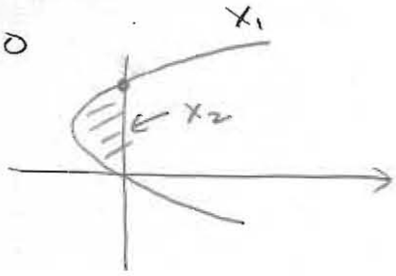
$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{4x+5}}\,dx = \frac{5-1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{9}} + 2\frac{1}{\sqrt{13}} + 2\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\frac{1}{\sqrt{21}} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{1}{5}\right)$$

$$\approx 1{,}0047028\ldots$$

7. (*6 points*) Calculer l'aire de la région fermée délimitée par la courbe $\cancel{y^2 = 2y}$ et la droite $\cancel{x = 0}$.

$x_2 = 0$



$x_1 = y^2 - 2y$

Points intersection

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow y^2 - 2y = 0$

$\Rightarrow y(y-2) = 0$

$\Rightarrow y = 0, 2$

$$A = \int_0^2 (x_2 - x_1)\, dy$$

$$= \int_0^2 [0 - (y^2 - 2y)]\, dy = \int_0^2 (-y^2 + 2y)\, dy$$

$$= -\frac{y^3}{3} + y^2 \Big|_0^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4\right) - 0$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}\, u^2}$$

8. (*6 points*) Soit un mobile dont la vitesse en fonction du temps est donnée par $v(t) = 25 - 2t$, où t est en secondes et $v(t)$ en m/s. Déterminer la distance parcourue entre $t = 0$ et et le temps où le mobile s'immobilise.

Trouvons $t_0 \ni v(t_0) = 0$

$\Rightarrow 25 - 2t_0 = 0$

$\Rightarrow t_0 = \frac{25}{2}$ sec.

Ainsi
$$D = \int_0^{25/2} v(t)\, dt$$

$$= \int_0^{25/2} (25 - 2t)\, dt$$

$$= 25t - t^2 \Big|_0^{\frac{25}{2}}$$

$$= \left(\frac{625}{2} - \frac{625}{4}\right) - 0$$

$$= \boxed{\frac{625}{4}\ m. = 156{,}25 \text{ mètres}}$$