1. a) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

or $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

donc $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$$0 \leq \text{''} \leq 0$$

D'où par la "sandwiche" $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

et ainsi $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$

a_n est convergente

b) $b_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{1+2x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$\overset{RH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2} = -1$$

d'où $\boxed{b_n \text{ converge.}}$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{1+3n} = \frac{-\infty}{\infty}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(\frac{1}{n} - 2n\right)}{\cancel{n}\left(\frac{1}{n} + 3\right)}$

$= -\infty$

Ainsi a_n diverge.

d) $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty$

Soit $A = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

alors $\ln A = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \infty$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1/x} = \frac{0}{0}$

$\underset{=}{RH} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \cancel{-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = 1$

$\Rightarrow \ln A = 1$

$\Rightarrow A = e$

d'où $\lim_{n\to\infty} e_n = e$ elle converge

e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Or $$0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et donc $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = 0$$

(sandwiche!)

2. $$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$= b_n + c_n$$

- b_n est une suite monotone bornée par $B = \frac{1}{3}$ et $b = 0$ donc convergente
- c_n st une suite monotone bornée par $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 0$ donc convergente (Théorème 6.5)
- alors $a_n = b_n + c_n$ est aussi convergente (Theorel 6.2)

$$\sum a_n = \sum b_n + \sum c_n$$

$$= \frac{1/3}{1 - 1/3} + \frac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx 2,9142$$

3. a) $2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$$

Série géométrique

$a = 2 \quad r = \frac{1}{3}$

Convergente puisque

$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$

$$S_7 = \frac{2}{1-\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3}^7\right)$$

$$= 2,99863$$

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

b) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$

série géométrique

de raison $r = -2$ et $a_1 = 1$

comme $|-2| > 1$ la S.G. est

divergente.

$$S_7 = \frac{1}{1--2}\left(1-(-2)^7\right)$$

$$= 43$$

c) $s = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

le truc est de mettre $\frac{1}{n(n+1)}$ sous

la forme $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ par la

méthode des fraction partielle et

on trouve $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

d'où

$$5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 5 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots \right)$$

C'est une série Télescopique

on voit que

$$S_n = 5 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

et donc

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S = \lim_{n \to \infty} 5 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 5$$

et $\boxed{S_7 = 5 \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{35}{8}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{5}}{1--\frac{1}{5}}$

S. G $\qquad$ S. G

$r = \frac{1}{2} \qquad r = -\frac{1}{5}$

$a = \frac{1}{2} \qquad a = -\frac{1}{5}$

$= 1 + \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}}$

$= 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$

$S_7 = 1\left(1-\frac{1}{2}^7\right) + \frac{-1}{6}\left(1-\left(-\frac{1}{5}\right)^7\right)$

$= 0{,}9921875 - 0{,}1666688$

$= 0{,}8255187$

e) $\underbrace{1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{80} + \frac{1}{100} + \frac{1}{120}}_{= \frac{449}{400}} = S_7$

$S = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{1}{i}\right)$

$\sum \frac{1}{20}\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{20} \sum \left(\frac{1}{i}\right) = \infty$

série harmonique

6. $S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right)$

$S_{12} = 12a + 66d = 80$

$a_3 = a + 2d = 6$

Système Équations

donc $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{118}{21} + (n-1)\frac{4}{21}\right]$

a $\quad$ d