Examen 1

Nom : Solutions

1. (*6 points*) Calculer y' puis déterminer la pente de la tangente à la courbe de $e^{x-y}+2=3x^2$ au point $(1,1)$.

$$(e^{x-y}+2)' = (3x^2)'$$

$$\Rightarrow e^{x-y}(x-y)' = 6x \quad 2$$

$$\Rightarrow e^{x-y}(1-y') = 6x$$

$$\Rightarrow e^{x-y}\cdot y' = e^{x-y} - 6x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{e^{x-y}-6x}{e^{x-y}} \quad 2$$

$$\text{d'où } y'\Big|_{(1,1)} = \frac{e^0-6}{e^0} = \boxed{-5} \quad 2$$

2. (*6 points*) Le théorème de Langrange stipule que si une fonction f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un nombre c compris entre a et b tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Utiliser ce résultat pour démontrer que $\ln x \leq x-1$ pour tout $x \in [1,\infty[$.

Soit $f(x) = \ln x$ sur $[1, x[$ où $x \to \infty$

on a $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad 2$

Clairement $f(x)$ est continue et $f'(x)$ est bien définie sur $[1, x[$

D'où $\exists\, c \in\,]1, x[$

$$\longmapsto \frac{1}{c} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \quad 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln x}{x-1}$$

comme $\dfrac{1}{c} \leq 1 \quad \forall c \in [1,\infty[$

on a $\dfrac{\ln x}{x-1} \leq 1$ $\quad 2$

$$\Rightarrow \ln x \leq x-1$$

$\square$

3. (*12 points*) Évaluer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x - ex + 3x^2 + 3\cos(\pi x)}{7x^3 - 2x^2 - 5}$ $= \dfrac{e^1 - e + 3 - 3}{7 - 2 - 5} = \dfrac{0}{0}$ 1

$\overset{RH}{=} \lim_{x\to 1} \dfrac{e^x - e + 6x - 3\pi \sin \pi x}{21x^2 - 4x}$ 2

$= \dfrac{e - e + 6 - 0}{21 - 4}$

$= \boxed{\dfrac{6}{17}}$ 1

(b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ $= \dfrac{1}{0}^0 = \infty^0$ ind 1

Soit $A = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln A = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right)^x$

$= \lim_{x\to 0^+} x \ln \frac{1}{x} = 0 \cdot -\infty$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{\infty}$ 1

$\overset{RH}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1/x} \cdot \cancel{-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{-1/x^2}}$ 1

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$

Donc si $\ln A = 0$

$\Rightarrow \boxed{A = 1}$ 1

(c) $\lim_{z\to 0^+} \left(\dfrac{1}{z} - \cot z\right)$ $= \dfrac{1}{0} - \cot 0$

$= \infty - \infty$ 1

$= \lim_{z\to 0^+} \dfrac{1}{z} - \dfrac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to 0^+} \dfrac{\sin z - z\cos z}{z \sin z} = \dfrac{0}{0}$ 1

$\overset{RH}{=} \lim_{z\to 0^+} \dfrac{\cos z - \cos z + z \sin z}{\sin z + z\cos z} = \dfrac{0}{0}$ 1

$\overset{RH}{=} \lim_{z\to 0^+} \dfrac{\sin z + z\cos z}{\cos z + \cos z - z \sin z} = \dfrac{0+0}{1+1-0}$ 1

$= 0$

4. (*6 points*) Calculer, d'une façon approximative, en utilisant la différentielle, la valeur de $\sqrt[3]{62,5}$ (La réponse de la calculatrice est 3,96850263, n'y pensez même pas !).

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad \underline{3}$

$x = 64$ et $dx = -1,5$

d'où $\sqrt[3]{62,5} = \sqrt[3]{64} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \cdot (-1,5)$

$= 4 + \dfrac{1}{3 \cdot 16} \cdot (-1,5)$ $\qquad \underline{3}$

$= \boxed{3,96875}$

5. (*25 points*) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{t^4} + \frac{t^2}{5}\right) dt = \int 5t^{-4}\,dt + \frac{1}{5}\int t^2\,dt$ $\qquad \underline{1}$

$= 5\dfrac{t^{-4+1}}{-4+1} + \dfrac{1}{5}\dfrac{t^{2+1}}{2+1} + C$ $\qquad \underline{2}$

$= -\dfrac{5}{3t^3} + \dfrac{1}{15}t^3 + C$ $\qquad \underline{2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin 2x}\,dx = \int \frac{1}{1-\sin 2x} \cdot \frac{1+\sin 2x}{1+\sin 2x}\,dx$ $\qquad 2$

$= \displaystyle\int \frac{1+\sin 2x}{1-\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 2x}\,dx$

Voir autre feuille pour méthode (2)

$= \displaystyle\int \sec^2 2x\,dx + \int \sin 2x \cos^{-2}(2x)\,dx$ $\qquad 2$

$u = 2x$ $\qquad v = \cos 2x$

$du = 2dx$ $\qquad dv = -2\sin 2x\,dx$

$\frac{1}{2}du = dx$ $\qquad -\frac{1}{2}dv = \sin 2x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sec^2 u\,du - \frac{1}{2}\int v^{-2}\,dv$

$= \dfrac{1}{2}\tan u - \dfrac{1}{2}\dfrac{v^{-1}}{-1} + C$ $\qquad \underline{1}$

$= \dfrac{1}{2}\tan 2x + \dfrac{1}{2\cos 2x} + C$ ou $\dfrac{1}{2}\left[\tan 2x + \sec 2x\right] + C$

4. (*6 points*) Calculer, d'une façon approximative, en utilisant la différentielle, la valeur de $\sqrt[3]{62,5}$ (La réponse de la calculatrice est 3,96850263, n'y pensez même pas!).

5. (*25 points*) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{t^4} + \frac{t^2}{5}\right) dt$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \sin 2x}\, dx = \int \frac{1}{1-\sin 2x} \cdot \frac{1+\sin 2x}{1+\sin 2x}\, dx$

$$= \int \frac{1+\sin 2x}{1-\sin^2 2x}\, dx = \int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 2x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 2x \, dx + \int \sec 2x \tan 2x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2\,dx \end{array} \Big\} \ \tfrac{1}{2} du = dx}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u \, du + \frac{1}{2}\int \sec u \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + \frac{1}{2}\sec u + C$$

$$= \frac{1}{2}(\tan 2x + \sec 2x) + C$$

(c) $\int \sin^7(8z)\cos(8z)dz = \int (\sin 8z)^7 \cos 8z \, dz$

$u = \sin 8z$

$du = 8\cos 8z \, dz$

$\frac{du}{8} = \cos 8z \, dz$

2

$= \frac{1}{8}\int u^7 \, du$ 1

$= \frac{1}{8}\frac{u^8}{8} + C$

$= \frac{1}{64}\sin^8 8z + C$ 2

(d) $\int \rho\sqrt{2\rho^2 - 1} \; d\rho$

Sub $u = 2\rho^2 - 1$

$du = 4\rho \, d\rho$

$\frac{1}{4}du = \rho \, d\rho$ 2

$= \frac{1}{4}\int u^{1/2} \, du$ 1

$= \frac{1}{4}\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C$

$= \frac{1}{6}u^{3/2} + C$

$= \frac{1}{6}\sqrt{(2\rho^2-1)^3} + C$ 2

(e) $\int \frac{y^3 + 2y^2 + 1}{y^2 + 1} \; dy$

2

$$\begin{array}{r|l} y^3 + 2y^2 + 1 & y^2 + 1 \\ -(y^3 + y) & y + 2 \\ \hline 2y^2 - y + 1 & \\ -(2y^2 + 2) & \\ \hline -y - 1 & \end{array}$$

$= \int \left[y + 2 - \frac{y+1}{y^2+1} \right] dy$

$= \int y\,dy + 2\int dy - \int \frac{1}{y^2+1} dy - \int \frac{y}{y^2+1} dy$

$u = y^2 + 1$

$du = 2y \, dy$

$\frac{1}{2}du = y \, dy$

$= \frac{y^2}{2} + 2y - \arctan y - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du$ 3

$= \frac{y^2}{2} + 2y - \arctan y - \frac{1}{2}\ln y^2+1 + C$