Solutionnaire
Exercices récapitulatifs

Chapitre 6 (page 391)

1.

	$\{a_n\}$	$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\}$	Cr ; Déc ; n Cr et n Déc	BS ; BI ; B ; nB	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$	C ; D
a)	$\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\right\}$	Cr	BI	$+\infty$	D
b)	$\{(-1)^n\}$	$\{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$	n Cr et n Déc	B	$\nexists$	D
c)	$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$	$\left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \ldots\right\}$	n Cr et n Déc	B	0	C
d)	$\{(-1)^{n+1}n\}$	$\{1, -2, 3, -4, 5, \ldots\}$	n Cr et n Déc	nB	$\nexists$	D
e)	$\{2\}$	$\{2, 2, 2, 2, 2, \ldots\}$	Cr et Déc	B	2	C
f)	$\left\{\frac{-3n}{n+3}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{4}, \frac{-6}{5}, \frac{-3}{2}, \frac{-12}{7}, \frac{-15}{8}, \ldots\right\}$	Déc	B	-3	C
g)	$\left\{n + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$	$\left\{0, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{17}{4}, \frac{24}{5}, \ldots\right\}$	Cr	BI	$+\infty$	D
h)	$\left\{\frac{-5^n}{n}\right\}$	$\left\{-5, \frac{-25}{2}, \frac{-125}{3}, \frac{-625}{4}, -625, \ldots\right\}$	Déc	BS	$-\infty$	D
i)	$\left\{2 - \frac{n}{(-2)^n}\right\}$	$\left\{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{19}{8}, \frac{7}{4}, \frac{69}{32}, \ldots\right\}$	n Cr et n Déc	B	2	C
j)	$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}\right\}$	$\left\{1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$	n Cr et n Déc	B	0	C
k)	$\{\sin n\}$	$\{\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \sin 5, \ldots\}$	n Cr et n Déc	B	$\nexists$	D
l)	$\left\{\frac{8n}{4n+1}\right\}$	$\left\{\frac{8}{5}, \frac{16}{9}, \frac{24}{13}, \frac{32}{17}, \frac{40}{21}, \ldots\right\}$	Cr	B	2	C
m)	$\left\{\frac{3}{n} + \frac{(-1)^n n}{3}\right\}$	$\left\{\frac{8}{3}, \frac{13}{6}, 0, \frac{25}{12}, \frac{-16}{15}, \ldots\right\}$	n Cr et n Déc	nB	$\nexists$	D
n)	$\left\{\frac{7}{(n-1)!}\right\}$	$\left\{7, 7, \frac{7}{2}, \frac{7}{6}, \frac{7}{24}, \ldots\right\}$	Déc	B	0	C

2. a) $a_1 = 1$; $a_2 = \dfrac{2}{1+1} = 1$; $a_3 = \dfrac{3}{1+1} = \dfrac{3}{2}$;

$a_4 = \dfrac{4}{1+\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{5}$; $a_5 = \dfrac{5}{1+\frac{8}{5}} = \dfrac{25}{13}$

d'où $\left\{1, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{25}{13}, \ldots\right\}$

b) $a_1 = -2$; $a_2 = -2 + 1!(-1)^2 = -1$

$a_3 = -1 + 2!(-1)^3 = -3$; $a_4 = -3 + 3!(-1)^4 = 3$

$a_5 = 3 + 4!(-1)^5 = -21$

d'où $\{-2, -1, -3, 3, -21, \ldots\}$

3. a) i) $b_{n+1} = a_{n+1} - 10$

$$= \frac{1}{2}a_n + 5 - 10$$
$$= \frac{1}{2}a_n - 5$$
$$= \frac{1}{2}(b_n + 10) - 5$$
$$= \frac{1}{2}b_n$$

ii) $b_1 = a_1 - 10 = -7$

$b_2 = \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{-7}{2}$

$b_3 = \dfrac{1}{2}b_2 = \dfrac{-7}{4}$; $b_4 = \dfrac{-7}{8}$

d'où $b_n = \dfrac{-7}{2^{n-1}}$

Puisque $a_n = b_n + 10$,

alors $a_n = 10 - \dfrac{7}{2^{n-1}}$

b) Puisque $a_{n+1} = a_n + 2n$, nous avons $a_{n+1} - a_n = 2n$;
de plus nous savons que $a_1 = 2$, ainsi

i) $a_{100} = (a_{100} - a_{99}) + (a_{99} - a_{98}) + (a_{98} - a_{97}) + \ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$

$= 2(99) + 2(98) + 2(97) + \ldots + 2(2) + 2(1) + 2$

$= 2(99 + 98 + 97 + \ldots + 2 + 1) + 2$

$= 2\left(\dfrac{99(99+1)}{2}\right) + 2$ (formule 1)

$= 9900 + 2$

d'où $a_{100} = 9902$

ii) $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$

$= 2(n-1) + 2(n-2) + \ldots + 2(2) + 2(1) + 2$

$= 2[(n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1] + 2$

$= 2\left[\dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2}\right] + 2$ (formule 1)

d'où $a_n = n(n-1) + 2$

c) Puisque $a_{n+2} = 7 - a_{n+1} - a_n$, nous avons
$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 7, \forall\, n \geq 1$;
de plus $a_3 = 5$ et $a_5 = 8$, ainsi

$a_3 + a_4 + a_5 = 5 + a_4 + 8 = 7$, donc $a_4 = -6$

$a_4 + a_5 + a_6 = -6 + 8 + a_6 = 7$, donc $a_6 = 5$

$a_5 + a_6 + a_7 = 8 + 5 + a_7 = 7$, donc $a_7 = -6$

$a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + 5 + -6 = 7$, donc $a_2 = 8$

$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 8 + 5 = 7$, donc $a_1 = -6$

donc $\{a_n\} = \{-6, 8, 5, -6, 8, 5, -6, 8, 5, \ldots\}$

où $a_n = \begin{cases} -6 & \text{si } n = 3k+1, \forall\, k \geq 0 \\ 8 & \text{si } n = 3k+2, \forall\, k \geq 0 \\ 5 & \text{si } n = 3k, \quad \forall\, k \geq 1 \end{cases}$

Puisque $2011 = 3(670) + 1$, nous avons
$a_{2011} = -6$

d) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$, $\forall\, n \geq 1$ et $a_1 = 203$

i) $a_2 = \dfrac{203}{1 + 203}$

$$a_3 = \frac{\frac{203}{1+203}}{1 + \frac{203}{1+203}} = \frac{\frac{203}{1+203}}{\frac{1+203+203}{1+203}} = \frac{203}{1+2(203)}$$

$$a_4 = \frac{\frac{203}{1+2(203)}}{1 + \frac{203}{1+2(203)}} = \frac{\frac{203}{1+2(203)}}{\frac{1+2(203)+203}{1+2(203)}} = \frac{203}{1+3(203)}$$

$\vdots$

$a_{203} = \dfrac{203}{1 + 202(203)}$

d'où $a_{203} = \dfrac{203}{41\,007}$

ii) $a_n = \dfrac{203}{1 + (n-1)203}$

4. a) $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x (\ln 2)^2}{2}$$
$$= +\infty$$

b) $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2)}{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{n}}$$
$$= \frac{2}{3}$$

6

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{2n-3}$

Cas où n est pair :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n-3} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n-3}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2-\frac{3}{n}}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Cas où n est impair :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n-3} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2}{2n-3}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{2-\frac{3}{n}}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n-3}$ n'existe pas.

d) $\left\{1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \ldots\right\}$, d'où $a_n = \dfrac{1}{n^2}$;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

e) $a_n = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$;

si $n = 2k$, $a_n = (-1)^{\left[\frac{2k}{2}\right]} = (-1)^k$

si $n = 2k+1$, $a_n = (-1)^{\left[\frac{2k+1}{2}\right]} = (-1)^{\left[k+\frac{1}{2}\right]} = (-1)^k$

si $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, où k est pair, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} (-1)^k = 1$$

si $n = 2k$ ou $2k+1$, où k est impair, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} (-1)^k = -1$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ n'existe pas.

f) $a_n = -n^2 + 3n + 1$;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} (-n^2 + 3n + 1) \quad (\text{ind. } -\infty + \infty)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(-1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

5. a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} 2 = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + \ldots$

$$S_n = \underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{n \text{ termes}}$$

d'où $S_n = 2n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$$

d'où la série diverge et $S = +\infty$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{(1)(3)} + \frac{2}{(3)(5)} + \frac{2}{(5)(7)} + \frac{2}{(7)(9)} + \ldots$

$S_1 = \dfrac{2}{3}$; $S_2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{4}{5}$; $S_3 = \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{35} = \dfrac{6}{7}$;

$S_4 = \dfrac{6}{7} + \dfrac{2}{63} = \dfrac{8}{9}$

d'où $S_n = \dfrac{2n}{2n+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}}\\ &= 1\end{aligned}$$

d'où la série converge et $S = 1$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \left(i^3 - (i+1)^3\right) = (1 - 2^3) + (2^3 - 3^3) + (3^3 - 4^3) + \ldots + \left(n^3 - (n+1)^3\right) + \ldots$

$S_n = 1 - 2^3 + 2^3 - 3^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (n-1)^3 - n^3 + n^3 - (n+1)^3$

d'où $S_n = 1 - (n+1)^3$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - (n+1)^3\right) = -\infty$$

d'où la série diverge et $S = -\infty$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) + \ldots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

d'où $S_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$$

d'où la série converge et $S = \dfrac{3}{2}$.

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i 2i = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 + \ldots$

$S_1 = -2$
$S_2 = -2 + 4 = 2$
$S_3 = -2 + 4 - 6 = -4$
$S_4 = -2 + 4 - 6 + 8 = 4$
$S_5 = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 = -6$
$S_6 = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 = 6$

d'où $S_n = \begin{cases} -(n+1) & \text{si } n \text{ est impair} \\ n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Si n est impair, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -(n+1) = -\infty$

si n est pair, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas

d'où la série diverge et S n'est pas définie.

6. a) $a_1 = 45$

$a_2 = 45 + 1(3) = 48$

$a_3 = 45 + 2(3) = 51$

$a_4 = 45 + 3(3) = 54$

$\vdots$

$a_{50} = 45 + 49(3) = 192$

$$S_{50} = 45 + 48 + 51 + 54 + \ldots + 189 + 192 = \frac{50}{2}(2(45) + 49(3)) = 5925$$

b) $a_{41} = a + 40(d) = 80$

$a_{51} = a + 50(d) = 2(80)$

donc $a + 40d = 80$ ①

et $a + 50d = 160$ ②

② − ① $10d = 80$

$d = 8$

Ainsi ① $a + 320 = 80$

$a = -240$

d'où $a = -240$ et $d = 8$

c) $S = 258 + 251 + 244 + \ldots - 288 - 295$

Déterminons le nombre n de termes de cette série arithmétique, où $d = -7$.

$258 + (n-1)(-7) = -295$

$-7n = -295 - 258 - 7$

$n = 80$

donc $S = 258 + 251 + 244 + \ldots - 288 - 295$

et $S = -295 - 288 - 281 - \ldots + 251 + 258$

$2S = 80(-37)$

$S = -1480$

d) Nous avons la série arithmétique suivante :

$$-27, \underbrace{-27 + d, -27 + 2d, \ldots, -27 + md}_{m \text{ termes}}, 63$$

Ainsi $-27 + (m+1)d = 63$

$(m+1)d = 90$

d'où $d = \dfrac{90}{m+1}$

e) En posant dans l'équation $S_n = \dfrac{n}{2}(2a + (n-1)d)$,

$n = 1525$, $d = 0{,}01$ et $S_n = 945{,}5$, nous obtenons

$945{,}5 = \dfrac{1525}{2}\left(2a + (1525-1)(0{,}01)\right)$

$1891 = 3050a + 1525(15{,}24)$

$-21350 = 3050a$

d'où $a = -7$

7. a) $1 + \dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{49} + \dfrac{8}{343} + \dfrac{16}{2401} + \ldots$

$a_n = \dfrac{2^n}{7^n}$, où $n \geq 0$

Ainsi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}}{7^{n+1}}}{\frac{2^n}{7^n}} = \dfrac{2}{7}$

C'est une série géométrique où $a = 1$ et $r = \dfrac{2}{7}$.

Puisque $-1 < r < 1$,

$S = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{7}} = \dfrac{7}{5}$

b) $e - e^3 + e^5 - e^7 + e^9 - e^{11} + \ldots$

$a_n = (-1)^n e^{2n+1}$, où $n \geq 0$

Ainsi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}e^{2n+3}}{(-1)^n e^{2n+1}} = -e^2$

C'est une série géométrique où $a = e$ et $r = -e^2$.

S n'est pas définie, car $r \leq -1$.

c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10} + \ldots$

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$

Puisque $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3}$, ce n'est pas une série géométrique.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right) = \frac{1}{2}(+\infty) \quad \text{(série harmonique)}$$

d'où $S = +\infty$

d) $\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{16} + \ldots$

$a_n = \dfrac{\pi}{2^n}$, où $n \geq 0$

Ainsi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{1}{2}$

C'est une série géométrique, où $a = \pi$ et $r = \dfrac{1}{2}$.

Puisque $-1 < r < 1$,

$S = \dfrac{\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\pi = \sin\pi + \sin 2\pi + \sin 3\pi + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$

C'est une série géométrique, où $a = 0$ et $r = 0$.

Puisque $-1 < r < 1$,

$S = \dfrac{0}{1-0} = 0$

6

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos n\pi = \cos\pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi + \ldots$

$= -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$

C'est une série géométrique, où $a = -1$ et $r = -1$.

S n'est pas définie, car $r \leq -1$.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-e}{\pi}\right)^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{-e}{\pi}\right)^{n+1}}{\left(\frac{-e}{\pi}\right)^n} = \frac{(-e)^{n+1}}{\pi^{n+1}} \cdot \frac{\pi^n}{(-e)^n} = \frac{-e}{\pi}$$

C'est une série géométrique, où $a = \frac{-e}{\pi}$ et $r = \frac{-e}{\pi}$.
Puisque $-1 < r < 1$,

$$S = \frac{\frac{-e}{\pi}}{1 - \left(\frac{-e}{\pi}\right)} = \frac{\frac{-e}{\pi}}{\frac{\pi + e}{\pi}} = \frac{-e}{\pi + e}$$

h) $\displaystyle\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{-1}{53n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{-1}{53n}}{\frac{-1}{53(n+1)}} = \frac{53n + 53}{53n}$$

Ce n'est pas une série géométrique.

$$\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{-1}{53n} = \frac{-1}{53}\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \frac{-1}{53}(+\infty) \qquad \text{(série harmonique)}$$

$$= -\infty$$

8. Soit la série arithmétique
$\{a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots, a + (n-1)d, \ldots\}$

$S_1 = a$ ①

et $S_2 = a + (a + d) = 2a + d$ ②

Puisque $S_n = 3{,}5n^2 - 2{,}5n$

$S_1 = 3{,}5 - 2{,}5 = 1$ et $S_1 = a$, donc $a = 1$

$S_2 = 3{,}5(2)^2 - 2{,}5(2) = 9$ et $S_2 = 2a + d$, donc $d = 7$

ainsi $\{a_n\} = \{1, 8, 15, \ldots, 1 + (k-1)7, \ldots\}$,
où $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Les termes $a_2 = 8$, $a_k = 1 + (k-1)7 = 7k - 6$ et $a_{74} = 512$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique.
Posons

$a = 8$ ①

$ar = 7k - 6$ ②

$ar^2 = 512$ ③

$\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar}$ (si $r \neq 0$)

$\frac{7k-6}{8} = \frac{512}{7k-6}$

$(7k-6)^2 = 4096$

$7k - 6 = 64$ ou $7k - 6 = -64$

$k = 10$ ou $k = \frac{-58}{7}$ (à rejeter)

ainsi $a_{10} = 7(10) - 6 = 64$

d'où $k = 10$; $a_2 = 8$, $a_{10} = 64$ et $a_{74} = 512$ sont les 3 termes consécutifs de la série géométrique.

9. a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} - \ldots + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n + \ldots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

C'est une série géométrique, où $a = 1$ et $r = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

Puisque $-1 < r < 1$,

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{2}{5^k} - \frac{3}{(-2)^{k+1}}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{5^k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3}{(-2)^{k+1}} = M_1 - M_2$

où $M_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{5^k}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{5^{n+1}}}{\frac{2}{5^n}} = \frac{2}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{2} = \frac{1}{5}, \text{ ainsi } r = \frac{1}{5}$$

Puisque $-1 < r < 1$, $M_1 = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{2}{\frac{4}{5}} = \dfrac{5}{2}$

où $M_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3}{(-2)^{k+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{(-2)^{n+2}}}{\frac{3}{(-2)^{n+1}}} = \frac{3}{(-2)^{n+2}} \cdot \frac{(-2)^{n+1}}{3} = \frac{-1}{2}, \text{ ainsi } r = \frac{-1}{2}$$

Puisque $-1 < r < 1$, $M_2 = \dfrac{\frac{3}{-2}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} = -1$

d'où $S = M_1 - M_2 = \frac{5}{2} - (-1) = \frac{7}{2}$

c) Nous avons une série géométrique où $a = \frac{5}{6}$ *et* $r = \frac{5}{6}$.

$$\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20}\right)}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} = 4{,}869\,5\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{40}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{40}\right)}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} = 4{,}996\,5\ldots$$

Puisque $-1 < r < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} = 5$$

d) Nous avons une série géométrique où $a = -2$ et $r = -2$.

$$\sum_{k=1}^{25} (-2)^k = \frac{(-2)(1-(-2)^{25})}{1-(-2)} = -22\,369\,622$$

$$\sum_{k=1}^{26} (-2)^k = \frac{(-2)(1-(-2)^{26})}{1-(-2)} = 44\,739\,242$$

Puisque $r \leq -1$, la somme est non définie.

e) Nous avons une série géométrique où $a = \dfrac{-2}{3}$ et $r = \dfrac{-2}{3}$.

$$\sum_{n=0}^{10} \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{11}\right)}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = -0{,}404\,6\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{11} \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{12}\right)}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = -0{,}396\,9\ldots$$

Puisque $-1 < r < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = -0{,}4$$

f) $$\sum_{n=1}^{10}\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2^{n-1}} - 2\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$$

Calculons d'abord $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2^{n-1}}$.

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1{,}998\,0\ldots$$

Calculons maitenant

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \ldots + \frac{1}{10(11)}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Ainsi $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, donc $S_{10} = \dfrac{10}{11}$

d'où $$\sum_{n=1}^{10}\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{n(n+1)}\right] = 1{,}998\,0\ldots - 2\left(\frac{10}{11}\right) = 0{,}179\,8\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}$$

Calculons d'abord $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$.

Nous avons une série géométrique où $a = 1$ et $r = \dfrac{1}{2}$.

Puisque $-1 < r < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Calculons maintenant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

d'où $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{n(n+1)}\right] = 2 - 2(1) = 0$$

g) $$\sum_{k=1}^{15}(60-3k) = \sum_{k=1}^{15}60 - 3\sum_{k=1}^{15}k = 60(15) - 3\left(\frac{15\times 16}{2}\right) = 540$$

$$\sum_{k=15}^{25}(60-3k)$$

$$= \sum_{k=1}^{25}(60-3k) - \sum_{k=1}^{14}(60-3k)$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{25}60 - 3\sum_{k=1}^{25}k\right] - \left[\sum_{k=1}^{14}60 - 3\sum_{k=1}^{14}k\right]$$

$$= \left[60(25) - 3\left(\frac{25\times 26}{2}\right)\right] - \left[60(14) - 3\left(\frac{14\times 15}{2}\right)\right] = 0$$

$$\sum_{k=50}^{2010}(60-3k) = -90 - 93 - 96 - \ldots - 5970$$

$$= -(\underbrace{90 + 93 + 96 + \ldots + 5970}_{1961 \text{ termes}})$$

$$= -\left[\left(\frac{90+5970}{2}\right)1961\right] = -5\,941\,830$$

h) $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1) + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!) + \ldots + k(k!)$

$S_1 = 1 \qquad \Rightarrow S_1 = 2! - 1$

$S_2 = 1 + 2(2!) = 1 + 2(2) = 5 \qquad \Rightarrow S_2 = 3! - 1$

$S_3 = 1 + 2(2!) + 3(3!) = 1 + 2(2) + 3(6) = 23$

$\Rightarrow S_3 = 4! - 1$

$S_4 = \underbrace{1 + 2(2!) + 3(3!)}_{S_3} + 4(4!) = 23 + 4(24) = 119$

$\Rightarrow S_4 = 5! - 1$

$S_5 = S_4 + 5(5!) = 119 + 5(120) = 719 \qquad \Rightarrow S_5 = 6! - 1$

d'où $S_n = (n+1)! - 1$;

$S_{10} = 39\,916\,799$

10.

Étape 1 Gilles prend $\frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$, il reste $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Étape 2 Pierre prend $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3^2}$, il reste $\frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Étape 3 Gilles prend $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^3}$, il reste $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2^2}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Étape 4 Pierre prend $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^4}$, il reste $\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2^3}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Étape 5 Gilles prend $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^5}$, il reste $\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \frac{2^4}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Étape 6 Pierre prend $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^6}$, il reste $\left(\frac{2}{3}\right)^5 - \frac{2^5}{3^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

$$G = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où } a = \frac{1}{3} \text{ et} \\ |r| < 1 \text{ car } r = \left(\frac{2}{3}\right)^2\end{array}\right)$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$P = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \ldots$$

$$= \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{4}{9}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où } a = \frac{2}{9} \text{ et} \\ |r| < 1 \text{ car } r = \left(\frac{2}{3}\right)^2\end{array}\right)$$

$$= \frac{2}{5}$$

d'où Gilles hérite de $\frac{3}{5}$ du litre et Pierre hérite de $\frac{2}{5}$ du litre.

11. Déterminons d'abord le nombre N de secondes dans une année de 365 jours.

$N = 365(24)(60)(60) = 31\,536\,000$

Construisons un tableau indiquant le nombre total k de tapements de mains et le temps t_k écoulé entre chaque tapement.

t_k	0	1	2	2^2	2^3	2^4	...	2^{k-2}	...
k	1	2	3	4	5	6	...	k	...

Déterminons n tel que la somme des temps soit inférieure ou égale au nombre de secondes dans une année.

$$\sum_{k=2}^{n} t_k \leq 31\,536\,000$$

$$\sum_{k=2}^{n} 2^{k-2} \leq 31\,536\,000$$

$$\frac{1(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} \leq 31\,536\,000 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}\right)$$

$$(2^{n-1} - 1) \leq 31\,536\,000$$

$$2^{n-1} \leq 31\,536\,001$$

$$(n-1)\ln 2 \leq \ln(31\,536\,001)$$

$$n \leq \frac{\ln(31\,536\,001)}{\ln 2} + 1$$

$$n \leq 25{,}910\ldots$$

d'où 25 tapements dans une année.

12. a) $S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\right)$

$$\left(\begin{array}{l}\text{séries géométriques où} \\ a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2} \text{ et } a = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \ldots\right)$

$$\left(\begin{array}{l}\text{séries géométriques où} \\ a = \frac{1}{2}, r = \frac{-1}{4} \text{ et } a = \frac{1}{4}, r = \frac{-1}{4}\end{array}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{-1}{4}\right)} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{-1}{4}\right)}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

c) $S = \left(5 - \frac{5}{3} + \frac{5}{9} - \frac{5}{27} + \frac{5}{81} - \ldots\right) - \left(3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \ldots\right)$ $\left(\begin{array}{l}\text{séries géométriques où}\\ a = 5, r = \frac{-1}{3} \text{ et } a = 3, r = \frac{1}{5}\end{array}\right)$

$= \frac{5}{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)} - \frac{3}{1 - \frac{1}{5}}$

$= \frac{15}{4} - \frac{15}{4}$

$= 0$

d) $S = 1 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$

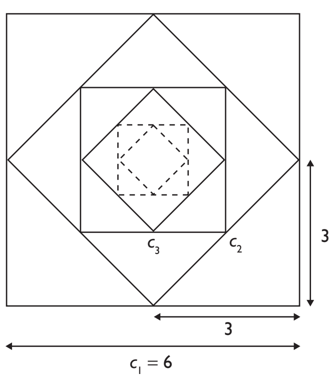
$= \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots\right) + \left(2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots\right)$ $\left(\begin{array}{l}\text{séries géométriques où}\\ a = 1, r = \frac{2}{3} \text{ et } a = 2, r = \frac{2}{3}\end{array}\right)$

$= \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{2}{1 - \frac{2}{3}}$

$= 3 + 6$

$= 9$

13. Calculons d'abord la longueur c_i de chacun des carrés.



$c_1 = 6$

$c_2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2(3^2)} = 3\sqrt{2}$

$c_3 = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$

$c_4 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\vdots$

$c_k = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-1}$

a) $A = \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k)^2$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 36\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ $\left(c_k^2 = 36\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)$

$= \frac{36}{1 - \frac{1}{2}}$ $\left(\text{série géométrique où } a = 36 \text{ et } r = \frac{1}{2}\right)$

d'où $A = 72$ cm²

b) $L = \sum_{k=1}^{+\infty} 4c_k$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 24\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-1}$

$= \frac{24}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\left(\text{série géométrique où } a = 24 \text{ et } r = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d'où $L = 24\left(2 + \sqrt{2}\right)$ cm

14. a) $a = 1 + \left[3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right]$

$= 1 + \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}$ $\left(\text{série géométrique où } a = 3 \text{ et } r = \frac{1}{3}\right)$

$= 1 + \frac{9}{2}$

$= \frac{11}{2}$

$b = 2 + \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right]$

$= 2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}\right)$ $\left(\text{série géométrique où } a = 1 \text{ et } r = \frac{-1}{2}\right)$

$= 2 + \frac{2}{3}$

$= \frac{8}{3}$

d'où $P\left(\frac{11}{2}, \frac{8}{3}\right)$ est le point d'arrivée.

b) $D = 3 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \ldots$

$= \left(3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)$

$= \left(\frac{3}{1 - \frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right)$ $\left(\begin{array}{l}\text{séries géométriques où}\\ a = 3, r = \frac{1}{3} \text{ et } a = 1, r = \frac{1}{2}\end{array}\right)$

$= \frac{9}{2} + 2$

$= 6{,}5$

d'où $D = 6{,}5$ m

6

15. a) Critère des polynômes

$d = 1 - 0 = 1$

Puisque $d \leq 1$, la série diverge.

b) Critère de comparaison

Puisque $\frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$ (car $(2^n + 1) \geq 2^n$)

et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge $\left(\text{série géométrique où } r = \frac{1}{2}\right)$

alors la série converge.

c) Critère de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{1}{x \ln x}\,dx \qquad (u = \ln x)$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\ln|\ln x|\Big|_2^M\right)$$
$$= +\infty$$

d'où la série diverge.

d) Critère de Cauchy

$$R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

e) Critère de comparaison

Puisque $\frac{n(\ln n)^n}{n^2 + 1} \geq \frac{n}{n^2 + 1}$ pour $n \geq 3$

(car $(\ln n)^n \geq 1$, pour $n \geq 3$) et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ diverge

(critère des polynômes, où $d = 2 - 1 = 1 \leq 1$)

alors la série diverge.

f) Critère de la série alternée

1) $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k \ln k} = 0$

2) La suite $\left\{\frac{1}{k \ln k}\right\}$ est décroissante, car en posant

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, nous obtenons

$f'(x) = \frac{-(1 + \ln x)}{(x \ln x)^2} < 0$ pour $x \geq 2$

d'où la série converge.

g) Série-p

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

C'est une série-p, où $p = \frac{3}{2} > 1$, d'où la série converge.

h) Critère de comparaison à l'aide d'une limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n + \sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n + \sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$
$$= 3$$

Puisque $L \in \mathbb{R}$ et $L > 0$ et puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge,

la série diverge.

i) Critère du terme général

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{4k^2}{4 + k^2}\right)^k = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{4}{\frac{4}{k^2} + 1}\right)^k = 4^{+\infty} = +\infty$$

Puisque $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$, la série diverge.

j) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{n} = (-1)\left(\frac{-1}{1}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{-1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Ainsi, nous obtenons la série harmonique,
qui est divergente.

k) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!(n+2)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n!(n+1)!}{(2n)!}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!(n+2)!}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n^2\left(2 + \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}$$
$$= \frac{1}{4}$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

l) Critère du terme général

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(3k)^k}{(2k+1)^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{3k}{2k+1}\right)^k$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{3}{2 + \frac{1}{k}}\right)^k$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}$$
$$= +\infty$$

Puisque $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$, la série diverge.

16. a) Critère des polynômes

$d = 2 - 1 = 1$

Puisque $d \leq 1$, la série diverge.

b) Critère de la série alternée

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{4n^2 + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4n + \frac{1}{n}} = 0$

2) La suite $\left\{\frac{3n}{4n^2+1}\right\}$ est décroissante,

car en posant $f(x) = \frac{3x}{4x^2+1}$,

nous obtenons $f'(x) = \frac{3-12x^2}{(4x^2+1)^2} \leq 0$ pour $x \geq 1$

d'où la série converge.

c) Puisque $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+5}}{4^{n+1}}}{\frac{5^{n+4}}{4^n}} = \frac{5^{n+5}}{4^{n+1}}\frac{4^n}{5^{n+4}} = \frac{5}{4}$

nous avons une série géométrique où $r = \frac{5}{4}$

d'où la série diverge et $S = +\infty$, car $r > 1$.

d) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{n!\,2^n}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n!\,2^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)2}{5}$$

$$= +\infty$$

Puisque $R > 1$, la série diverge.

e) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{n2^n}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n2^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)2}{5n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{5}$$

$$= \frac{2}{5}$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

f) Puisque $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(-5)^{n+1}}{8^n}}{\frac{(-5)^n}{8^{n-1}}} = \frac{(-5)^{n+1}}{8^n}\frac{8^{n-1}}{(-5)^n} = \frac{-5}{8}$,

nous avons une série géométrique où $a = -5$ et $r = \frac{-5}{8}$,

d'où la série converge, car $-1 < r < 1$ et

$$S = \frac{-5}{1-\left(\frac{-5}{8}\right)} = \frac{-40}{13}$$

g) Critère de comparaison

Puisque $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1$ pour $n \geq 1$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ diverge,

alors la série diverge.

h) Critère de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{M\to+\infty} -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{-2}{e^{\sqrt{M}}} + \frac{2}{e}\right)$$

$$= \frac{2}{e}$$

d'où la série converge (car l'intégrale est convergente).

i) Critère de comparaison

Puisque $\frac{8}{n^2(4+\ln n)} \leq \frac{8}{4n^2} = \frac{2}{n^2}$ pour $n \geq 7$

et que $\sum_{n=7}^{+\infty}\frac{2}{n^2}$ converge (série-p, où $p = 2 > 1$),

alors la série converge.

j) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n+5^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{9^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n}{9^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n$$

(séries géométriques où $a = \frac{4}{9}, r = \frac{4}{9}$ et $a = \frac{5}{9}, r = \frac{5}{9}$)

$$= \frac{\frac{4}{9}}{1-\left(\frac{4}{9}\right)} + \frac{\frac{5}{9}}{1-\left(\frac{5}{9}\right)}$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{41}{20}$$

La série converge et $S = \frac{41}{20}$.

k) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2\left(\frac{99}{100}\right)^{n+1}}{n^2\left(\frac{99}{100}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{99(n+1)^2}{100n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{99}{100}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{99}{100}$$

Puisque $R < 1$, la série converge.

6

l) Puisque

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{(-\pi)^{2(k+1)}}{\left(\sqrt{98}\right)^{k+1}}}{\dfrac{(-\pi)^{2k}}{\left(\sqrt{98}\right)^{k}}} = \frac{(-\pi)^{2k+2}}{\left(\sqrt{98}\right)^{k+1}}\frac{\left(\sqrt{98}\right)^{k}}{(-\pi)^{2k}} = \frac{(-\pi)^2}{\sqrt{98}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{98}}$$

nous avons une série géométrique où $r = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{98}}$ et $a = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{98}}$, d'où la série converge car $-1 < r < 1$ et

$$S = \frac{\dfrac{\pi^2}{\sqrt{98}}}{1 - \dfrac{\pi^2}{\sqrt{98}}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{98} - \pi^2}$$

17. a) Déterminons si la série alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5n}$ est convergente.

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5n} = 0$

2) La suite $\left\{\dfrac{1}{5n}\right\}$ est décroissante, car en posant $f(x) = \dfrac{1}{5x}$, nous obtenons $f'(x) = \dfrac{-1}{5x^2} < 0$ pour tout $x \geq 1$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5n}$ est convergente.

Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{5n}\right| = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (série harmonique)

alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5n}$ est conditionnellement convergente.

b) Déterminons si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$ est convergente.

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = 0$

2) La suite $\left\{\dfrac{1}{(2n)^2}\right\}$ est décroissante, car en posant $f(x) = \dfrac{1}{(2x)^2}$, nous obtenons $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^3} < 0$ pour tout $x \geq 1$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$ est convergente.

Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

est convergente (série-p où $p = 2 > 1$)

alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$ est absolument convergente.

c) Déterminons si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ est convergente.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1 \neq 0$, la série est divergente.

d) Critère généralisé de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\dfrac{(n+1)(-4)^{n+3}}{5^{n+1}}}{\dfrac{n(-4)^{n+2}}{5^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)4^{n+3}}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n4^{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4(n+1)}{5n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{4}{5}$$

Puisque $R < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n(-4)^{n+2}}{5^n}$ est absolument convergente.

De plus, pour le théorème 6.24, la série est convergente.

e) Déterminons si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-3)^n}$ est convergente.

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)}{(3)(3)(3)\ldots(3)(3)(3)} = +\infty \neq 0$

La série est divergente.

f) Déterminons si la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$ est convergente.

1) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{k}$ est une indétermination de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

2) La suite $\left\{\dfrac{\ln k}{k}\right\}$ est décroissante, car en posant $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, nous obtenons $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0$ pour tout $x \geq 3$.

Donc, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$ est convergente.

Déterminons si $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^k \ln k}{k}\right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k}$ est convergente.

Critère de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left(\frac{(\ln x)^2}{2}\bigg|_2^M\right)$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\frac{(\ln M)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2}\right)$$

$$= +\infty$$

Donc, la série est divergente, d'où $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$ est conditionnellement convergente.

18. a) i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k+2} \approx \frac{-\sqrt{1}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{4}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{7}$

et $E \leq \dfrac{\sqrt{6}}{8}$

d'où $S \approx -0{,}312\,2\ldots$ et $E \leq 0{,}3061\ldots$

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\pi}{k^3} \approx -1 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}$ et $E \leq \dfrac{1}{5^3}$

d'où $S \approx -0{,}896\,4\ldots$ et $E \leq 0{,}008$

b) Puisque $E \leq a_{n+1} = \left|\dfrac{\cos((n+1)\pi)}{n^3}\right| = \dfrac{1}{n^3}$

nous cherchons n tel que $\dfrac{1}{n^3} < 10^{-6}$

$$n^3 > 10^6$$
$$n > \sqrt[3]{10^6}$$
$$n > 100$$

d'où $n = 101$ suffit.

19. a) Critère généralisé de d'Alembert, pour $x \neq -2$

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-4)^{n+1}(x+2)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(-4)^n(x+2)^n}{n}}\right|$$
$$= |x+2| \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n+1}$$
$$= 4|x+2| \quad \left(\text{car } \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n+1} = 4\right)$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $|x+2| < \dfrac{1}{4}$,

donc $\dfrac{-9}{4} < x < \dfrac{-7}{4}$, la série converge.

Lorsque $|x+2| = \dfrac{1}{4}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{-9}{4}$ ou $x = \dfrac{-7}{4}$,

nous obtenons :

si $x = \dfrac{-9}{4}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-4)^k\left(\frac{-1}{4}\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

qui est une série divergente (série harmonique) ;

si $x = \dfrac{-7}{4}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-4)^k\left(\frac{1}{4}\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

qui est une série convergente (série harmonique alternée) ;

d'où $I = \left]\dfrac{-9}{4}, \dfrac{-7}{4}\right[$ et $r = \dfrac{1}{4}$.

b) Pour $x \neq \dfrac{7}{2}$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(2x-7)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{(2x-7)^n}{n(n+1)}}\right|$$
$$= |2x-7| \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}$$
$$= |2x-7| \quad \left(\text{car } \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1\right)$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $|2x-7| < 1$,

donc $3 < x < 4$, la série converge.

Lorsque $|2x-7| = 1$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = 4$,

nous obtenons :

si $x = 3$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$

qui est une série alternée convergente ;

si $x = 4$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

qui est une série convergente (critère des polynômes) ;

d'où $I = [3, 4]$ et $r = \dfrac{1}{2}$.

c) Pour $x \neq 0$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln(n+1)\, x^{n+1}}{\ln n\, x^n}\right|$$
$$= |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$
$$= |x| \quad \left(\text{car } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1\right)$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $|x| < 1$,

donc $-1 < x < 1$, la série converge.

Lorsque $|x| = 1$, c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = 1$,

nous obtenons :

si $x = -1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \ln k$

qui est une série divergente (critère du terme général) ;

si $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \ln k$

qui est une série divergente (critère du terme général) ;

d'où $I =]-1, 1[$ et $r = 1$.

d) Pour $x \neq 0$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{\ln(n+1)\, x^{n+1}}{(n+1)^3}}{\dfrac{\ln n\, x^n}{n^3}}\right|$$
$$= |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 \ln(n+1)}{(n+1)^3 \ln n}$$
$$= |x| \quad \left(\text{car } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 \ln(n+1)}{(n+1)^3 \ln n} = 1\right)$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $|x| < 1$,

donc $-1 < x < 1$, la série converge.

Lorsque $|x| = 1$, c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = 1$,

nous obtenons :

si $x = -1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^3}$

qui est une série alternée convergente ;

si $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^3}$

qui est une série convergente

$\left(\text{critère de comparaison } \dfrac{\ln k}{k^3} < \dfrac{1}{k^2}, \text{ série-}p \text{ où } p = 2\right)$;

d'où $I = [-1, 1]$ et $r = 1$.

6

e) Pour $x \neq 3$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)!(x-3)^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{n!(x-3)^n}{(2n)!}}\right|$$

$$= |x-3|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!}$$

$$= |x-3|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= |x-3|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(2n+1)}$$

$$= |x-3|(0)$$

$$= 0$$

Puisque $R < 1$ pour tout x, $I = -\infty, +\infty$ et $r = +\infty$.

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(3x-4)^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3x-4}{5}\right)^k$

est une série géométrique de raison $r = \dfrac{3x-4}{5}$

et la série converge uniquement pour

$$-1 < r < 1$$

c'est-à-dire $-1 < \dfrac{3x-4}{5} < 1$

$$\frac{-1}{3} < x < 3$$

d'où $I = \left]\dfrac{-1}{3}, 3\right[$ et $r = \dfrac{5}{3}$.

g) Critère généralisé de Cauchy, pour $x \neq 5$

$$R = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{7}\right)^n(x-5)^n\right|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{n}{7}\right)(x-5)\right|$$

$$= |x-5|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{7}$$

$$= +\infty \qquad \left(\text{car } \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{7} = +\infty\right)$$

Puisque $R > 1$, pour tout $x \neq 5$, la série diverge.

Pour $x = 5$, nous obtenons $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k}{7}\right)^k(0)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}(0) = 0$

La série converge uniquement pour $x = 5$ et $r = 0$

h) Pour $x \neq 0$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{nx^{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\dfrac{(n-1)x^n}{n^{2n}}}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)^{2n+2}}\cdot\frac{n^{2n}}{(n-1)}$$

$$= |x|\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= |x|(1)\left(\frac{1}{e^2}\right)(0)$$

$$= 0$$

Puisque $R < 1$ pour tout x, $I = -\infty, +\infty$ et $r = +\infty$.

20. a)

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4} \qquad f'''(0) = -3!$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}} \qquad f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+c)^{n+2}}$$

i) $$\frac{1}{1+x} = 1 - 1x + \frac{2x^2}{2!} - \frac{3!x^3}{3!} + \frac{4!x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n n!x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)!(1+c)^{n+2}}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}x^{n+1},$$

où $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$

ii) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$

Pour $x \neq 0$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(-1)^n x^n}\right| = |x|$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $|x| < 1$, donc $-1 < x < 1$, la série converge.

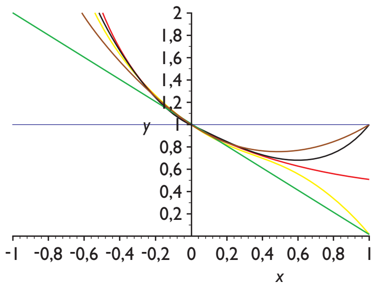
Lorsque $|x| = 1$, c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = 1$, nous obtenons :

si $x = -1$, $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ qui est une série divergente ;

si $x = 1$, $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ qui est une série divergente ;

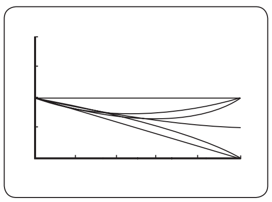
d'où $I =]-1, 1[$ et $r = 1$.

iii)
```
> f:=x->1/(1+x);
```
$$f := x \to \frac{1}{1+x}$$
```
> P0:=x->1;
```
$$P0 := x \to 1$$
```
> P1:=x->1-x;
```
$$P1 := x \to 1 - x$$
```
> P2:=x->1-x+x^2;
```
$$P2 := x \to 1 - x + x^2$$
```
> P3:=x->1-x+x^2-x^3;
```
$$P3 := x \to 1 - x + x^2 - x^3$$
```
> P4:=x->1-x+x^2-x^3+x^4;
```
$$P4 := x \to 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$$
```
> plot([f(x),P0(x),P1(x),P2(x),P3(x),P4(x)],x=-1..1,
  y=0..2,color=[red,blue,green,sienna,coral,black]);
```




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■1/(1+X)
\Y2■1
\Y3■1-X
\Y4■1-X+X²
\Y5■1-X+X²-X^3
\Y6■1-X+X²-X^3+X^4
```

```
WINDOW
Xmin=Ø
Xmax=1
Xscl=.2
Ymin=Ø
Ymax=2
Yscl=.5
Xres=1
```



b)
$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} & f(0) &= 1\\ f'(x) &= -e^{-x} & f'(0) &= -1\\ f''(x) &= e^{-x} & f''(0) &= 1\\ f'''(x) &= -e^{-x} & f'''(0) &= -1\\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

i) $$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-c}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

où $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$

ii) $$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots$$

Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}}\right|\\ &= |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\\ &= |x|(0)\\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $R < 1$ pour tout x, $I = -\infty, +\infty$ et $r = +\infty$.

iii) > f:=x->exp(-x);

$$f := x \to e^{(-x)}$$

> P0:=x->1;

$$P0 := x \to 1$$

> P1:=x->1-x;

$$P1 := x \to 1 - x$$

> P2:=x->1-x+x^2/2;

$$P2 := x \to 1 - x + \frac{1}{2} x^2$$

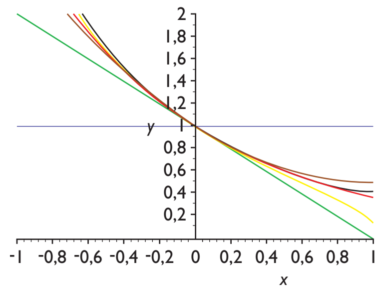
> P3:=x->1-x+x^2/2-x^3/3;

$$P3 := x \to 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3$$

> P4:=x->1-x+x^2/2-x^3/3+x^4/4;

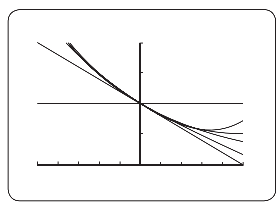
$$P4 := x \to 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4$$

> plot([f(x),P0(x),P1(x),P2(x),P3(x),P4(x)],x=-1..1, y=0..2,color=[red,blue,green,sienna,coral,black])




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■e^(-X)
\Y2■1
\Y3■1-X
\Y4■1-X+.5X²
\Y5■1-X+.5X²-(1/3)X^3
\Y6■1-X+(1/2)X²-
(1/3)X^3+(1/4)X^4
```

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=1
Xscl=.2
Ymin=Ø
Ymax=2
Yscl=.5
Xres=1
```



c)
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(-3x) & f(0) &= 0\\ f'(x) &= -3\cos(-3x) & f'(0) &= -3\\ f''(x) &= -3^2\sin(-3x) & f''(0) &= 0\\ f'''(x) &= 3^3\cos(-3x) & f'''(0) &= 3^3\\ f^{(4)}(x) &= 3^4\sin(-3x) & f^{(4)}(0) &= 0\\ f^{(5)}(x) &= -3^5\cos(-3x) & f^{(5)}(0) &= -3^5\\ f^{(6)}(x) &= -3^6\sin(-3x) & f^{(6)}(0) &= 0\\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

i) $$\sin(-3x) = 0 - 3x + 0\,\frac{x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + 0\,\frac{x^4}{4!} - \frac{3^5 x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n+2} \sin(-3c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\sin(-3x) = -3x + \frac{(3x)^3}{3!} - \frac{(3x)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}\sin(-3c)}{(2n+2)!}(3x)^{2n+2}$$

où $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$

6

ii) $\sin(-3x) = -3x + \dfrac{(3x)^3}{3!} - \dfrac{(3x)^5}{5!} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

Pour $x \neq 0$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+2}(3x)^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{(-1)^{n+1}(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|$$

$$= |3x|^2 \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$= |3x^2| \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$= |3x^2|(0)$$

$$= 0$$

Puisque $R < 1$ pour tout x, $I = -\infty, +\infty$ et $r = +\infty$.

iii) > f:=x->sin(-3*x);

$$f := x \to \sin(-3x)$$

> P1:=x->-3*x;

$$P1 := x \to -3x$$

> P3:=x->-3*x+(3*x)^3/3!;

$$P3 := x \to -3x + \frac{27x^3}{3!}$$

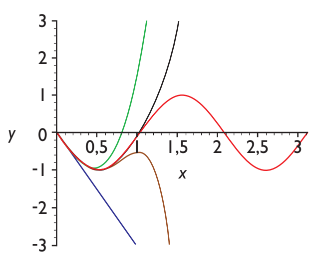
> P5:=x->-3*x+(3*x)^3/3!-(3*x)^5/5!;

$$P5 := x \to -3x + \frac{27x^3}{3!} - \frac{243x^5}{5!}$$

> P7:=x->-3*x+(3*x)^3/3!-(3*x)^5/5!+(3*x)^7/7!;

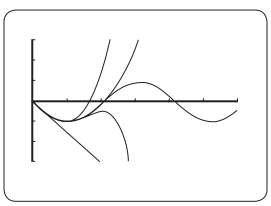
$$P7 := x \to -3x + \frac{27x^3}{3!} - \frac{243x^5}{5!} + \frac{2187x^7}{7!}$$

> plot([f(x),P1(x),P3(x),P5(x),P7(x)],x=0..Pi,y=-3..3,
color=[red,blue,green,sienna,black]);




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(-3X)
\Y2=-3X
\Y3=-3X+(27/6)X^3
\Y4=-3X+(27/6)
X^3-(243/120)X^5
\Y5=-3X+(27/6)
X^3-(243/120)
X^5+(2187/5040)X^7
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=3
Xscl=.5
Ymin=-3
Ymax=3
Yscl=1
Xres=1
```



21.

$f(x) = \ln(1-2x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \dfrac{-2}{1-2x}$	$f'(0) = -2$
$f''(x) = \dfrac{-2^2}{(1-2x)^2}$	$f''(0) = -2^2$
$f'''(x) = \dfrac{-2^3(2)}{(1-2x)^3}$	$f'''(0) = -2^3(2)$
$f^{(4)}(x) = \dfrac{-2^4(3!)}{(1-2x)^4}$	$f^{(4)}(0) = -2^4(3!)$
$f^{(5)}(x) = \dfrac{-2^5(4!)}{(1-2x)^5}$	$f^{(5)}(0) = -2^5(4!)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = \dfrac{-2^n(n-1)!}{(1-2x)^n}$	$f^{(n)}(0) = -2^n(n-1)!$
$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{-2^{n+1}n!}{(1-2x)^{n+1}}$	$f^{(n+1)}(c) = \dfrac{-2^{n+1}n!}{(1-2c)^{n+1}}$

a) $\ln(1-2x) = 0 - 2x - \dfrac{2^2x^2}{2!} - \dfrac{2^3 2x^3}{3!} - \dfrac{2^4 3!\,x^4}{4!} - \dfrac{2^5 4!\,x^5}{5!} - \ldots - \dfrac{2^n(n-1)!\,x^n}{n!} - \dfrac{2^{n+1}n!}{(n+1)!(1-2c)^{n+1}}x^{n+1}$

$$\ln(1-2x) = -2x - \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} - \ldots - \frac{(2x)^n}{n} - \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)(1-2c)^{n+1}},$$

où $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$

b) $\ln(1-2x) = -2x - \dfrac{(2x)^2}{2} - \dfrac{(2x)^3}{3} - \dfrac{(2x)^4}{4} - \dfrac{(2x)^5}{5(1-2c)^5}$,

où $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$

En posant $x = 0{,}25$, nous obtenons

$$\ln(0{,}5) = -(0{,}5) - \frac{(0{,}5)^2}{2} - \frac{(0{,}5)^3}{3} - \frac{(0{,}5)^4}{4} - \frac{1}{(1-2c)^5}\frac{(0{,}5)^5}{5},$$

où $c \in]0\,; 0{,}25[$

$$\ln(0{,}5) \approx -(0{,}5) - \frac{(0{,}5)^2}{2} - \frac{(0{,}5)^3}{3} - \frac{(0{,}5)^4}{4}$$

où $E = \dfrac{(0{,}5)^5}{(1-2c)^5 5} \leq \dfrac{(0{,}5)^5 2^5}{5}$

$\ln(0{,}5) \approx -0{,}682\,29\ldots$ où $E < 0{,}2$

d'où $\ln(0{,}5) \approx -0{,}682$ où $E < 0{,}2$

c) $\ln(1-2x) = -2x - \dfrac{(2x)^2}{2} - \dfrac{(2x)^3}{3} - \dfrac{(2x)^4}{4} - \ldots - \dfrac{(2x)^n}{n} - \ldots$

Pour $x \neq 0$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(2x)^n}{n}}\right| = |2x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |2x|$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $|2x| < 1$, donc $\dfrac{-1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$, la série converge.

6

Lorsque $|2x| = 1$, c'est-à-dire $x = \frac{-1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$, nous obtenons :

si $x = \frac{-1}{2}$, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

qui est une série convergente ;

si $x = \frac{1}{2}$, $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$

qui est une série divergente ;

d'où $I = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et $r = \frac{1}{2}$.

d) > f:=x->ln(1-2*x);

$$f := x \to \ln(1 - 2x)$$

> P1:=x->-2*x;

$$P1 := x \to -2x$$

> P2:=x->-2*x-(2*x)^2/2;

$$P2 := x \to -2x - 2x^2$$

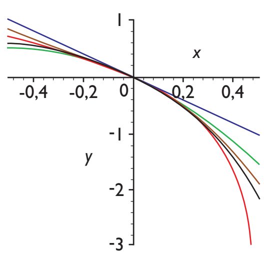
> P3:=x->-2*x-(2*x)^2/2-(2*x)^3/3;

$$P3 := x \to -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3$$

> P4:=x->-2*x-(2*x)^2/2-(2*x)^3/3-(2*x)^4/4;

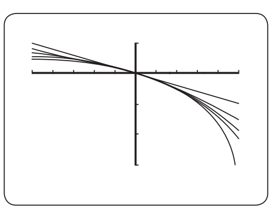
$$P4 := x \to -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 - 4x^4$$

> plot([f(x),P1(x),P2(x),P3(x),P4(x)],x=-1/2..1/2,y=-3..1, color=[red,blue,green,sienna,black]);




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=ln(1-2X)
\Y2=-2X
\Y3=-2X-2X²
\Y4=-2X-2X²-(8/3)
X^3
\Y5=-2X-2X²-(8/3)
X^3-4X^4
```

```
WINDOW
Xmin=-.5
Xmax=.5
Xscl=.1
Ymin=-3
Ymax=1
Yscl=1
Xres=1
```



22. a)

$f(x) = \sin x$ $\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f''(x) = -\sin x$ $\quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$

$f'''(x) = -\cos x$ $\quad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ $\quad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\vdots \qquad \vdots$

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4}{4!}\right) + \ldots$$

Notons que les termes sont tous de la forme

$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n}{n!}$ ou $\pm\frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n}{n!}$, c'est-à-dire $k_n\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n}{n!}$, où $k_n = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\pm\frac{1}{2}$.

Pour $x \neq \frac{\pi}{6}$,

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{k_{n+1}\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!}}{k_n\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n}{n!}}\right| \\ &= \left|\frac{k_{n+1}}{k_n}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right| \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \left|\frac{k_{n+1}}{k_n}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right| \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} \\ &= \left|\frac{k_{n+1}}{k_n}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $R < 1$ pour tout x, $I = -\infty, +\infty$.

b)

$f(x) = e^x$ $\quad f(1) = e$

$f'(x) = e^x$ $\quad f'(1) = e$

$f''(x) = e^x$ $\quad f''(1) = e$

$\vdots \qquad \vdots$

$$e^x = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2!} + e\frac{(x-1)^3}{3!} + \ldots + e\frac{(x-1)^n}{n!} + \ldots$$

Pour $x \neq 1$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{e(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{e(x-1)^n}{n!}}\right|$$

$$= |x-1|\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$= |x|(0)$$

$$= 0$$

Puisque $R < 1$ pour tout x, $I = -\infty, +\infty$.

c)

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \qquad f(2) = 0$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} \qquad f'(2) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{4(-2)}{(x+2)^3} \qquad f''(2) = \frac{-2}{4^2}$$

$$f'''(x) = \frac{4(3!)}{(x+2)^4} \qquad f'''(2) = \frac{3!}{4^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4(-4!)}{(x+2)^5} \qquad f^{(4)}(2) = \frac{-4!}{4^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{4(-1)^{n+1}(n!)}{(x+2)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{4^n}$$

$$\frac{x-2}{x+2} = 0 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{2}{4^2}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{3!}{4^3}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{4!}{4^4}\frac{(x-2)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}n!}{4^n}(x-2)^n + \ldots$$

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(x-2)^3}{4^3} - \frac{(x-2)^4}{4^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{4^n} + \ldots$$

Pour $x \neq 2$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+2}(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{4^n}}\right| = \frac{|x-2|}{4}$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $\dfrac{|x-2|}{4} < 1$,

donc $-2 < x < 6$, la série converge.

Lorsque $\dfrac{|x-2|}{4} = 1$, c'est-à-dire $x = -2$ ou $x = 6$,

nous obtenons :

si $x = -2$, $-1 - 1 - 1 - \ldots - 1 \ldots$

qui est une série divergente ;

si $x = 6$, $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

qui est une série divergente ;

d'où $I =]-2, -6[$.

d)

$$f(x) = \sin 2x \qquad f(\pi) = 0$$

$$f'(x) = 2\cos 2x \qquad f'(\pi) = 2$$

$$f''(x) = -2^2\sin 2x \qquad f''(\pi) = 0$$

$$f'''(x) = -2^3\cos 2x \qquad f'''(\pi) = -2^3$$

$$f^{(4)}(x) = 2^4\sin 2x \qquad f^{(4)}(\pi) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 2^5\cos 2x \qquad f^{(5)}(\pi) = 2^5$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sin 2x = 0 + 2(x-\pi) + 0\frac{(x-\pi)^2}{2!} - 2^3\frac{(x-\pi)^3}{3!} + 0\frac{(x-\pi)^4}{4!} + 2^5\frac{(x-\pi)^5}{5!} + \ldots$$

$$\sin 2x = 2(x-\pi) - \frac{2^3(x-\pi)^3}{3!} + \frac{2^5(x-\pi)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n2^{2n+1}(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Pour $x \neq \pi$,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n+3}(x-\pi)^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{(-1)^n2^{2n+1}(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|$$

$$= 2^2|x-\pi|^2\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$= 4(x-\pi)^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$= 4(x-\pi)^2(0)$$

$$= 0$$

Puisque $R < 1$ pour tout x, $I = -\infty, +\infty$.

23. a)

$$f(x) = \cos x \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'''(x) = \sin x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cos x = 0 - 1\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \ldots$$

$$\cos x = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

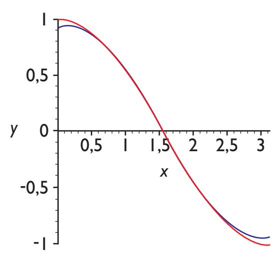
b) > f:=x->cos(x);

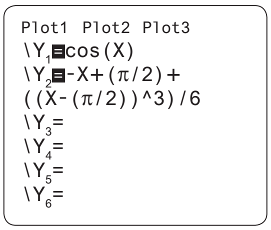
$$f := x \to \cos(x)$$

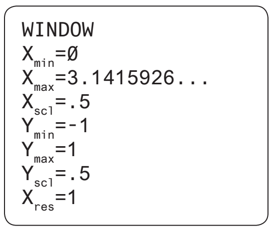
> P3:=x->-(x-Pi/2)+(x-Pi/2)^3/3!;

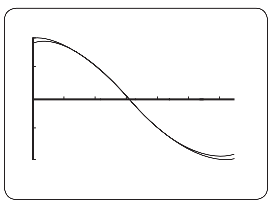
$$P3 := x \to -x + \frac{\pi}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}$$

> plot([f(x),P3(x)],x=0..Pi,color=[red,blue]);









c) En remplaçant x par $\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}5\right)$, nous obtenons

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}5\right) = -(-0{,}5) + \frac{(-0{,}5)^3}{3!} - \frac{(-0{,}5)^5}{5!} + \frac{(-0{,}5)^7}{7!} - \ldots$$

$$\approx 0{,}5 + \frac{(-0{,}5)^3}{3!}, \text{ où } E \leq \left|\frac{(-0{,}5)^5}{5!}\right|$$

d'où $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}5\right) \approx 0{,}479\,1\overline{6}$, où $E \leq 0{,}000\,26\ldots$

En remplaçant x par 0, nous obtenons

$$\cos 0 = -\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^5}{5!} + \frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^7}{7!} - \ldots$$

$$\approx \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}, \text{ où } E \leq \left|\frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^5}{5!}\right|$$

d'où $\cos 0 \approx 0{,}924\,8\ldots$, où $E \leq 0{,}079\,69\ldots$

24. Nous utiliserons les développements suivants.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

a) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \text{ (en effectuant la division)}$$

b)
$$\sin x \cos x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
&\quad - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!2!} - \frac{x^7}{5!2!} + \frac{x^9}{7!2!} - \ldots \\
&\quad + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{3!4!} + \frac{x^9}{5!4!} - \ldots \\
&\quad - \frac{x^7}{6!} + \frac{x^9}{3!6!} - \ldots \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$= x - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{4!}\right)x^5 - \left(\frac{1}{7!} + \frac{1}{5!2!} + \frac{1}{3!4!} + \frac{1}{6!}\right)x^7 + \ldots$$

$$= x - \frac{2^2 x^3}{3!} + \frac{2^4 x^5}{5!} - \frac{2^6 x^7}{7!} + \ldots$$

c)
$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \ldots \\
&\quad - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} - \frac{x^5}{2!3!} - \frac{x^6}{3!3!} + \ldots \\
&\quad + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{5!} + \frac{x^7}{2!5!} + \ldots \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$= x + x^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right)x^4 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 + \ldots$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \ldots$$

6

d) $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots}{x}$

$= 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \ldots$

25. a) En utilisant

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^{10}}{10!} + \ldots$$

$$1 - \cos t = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{10}}{10!} - \ldots$$

$$\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2!} - \frac{t^2}{4!} + \frac{t^4}{6!} - \frac{t^6}{8!} + \frac{t^8}{10!} - \ldots$$

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{1}{2!} - \frac{t^2}{4!} + \frac{t^4}{6!} - \frac{t^6}{8!} + \frac{t^8}{10!} - \ldots\right) dt$$

$$= \left(\frac{t}{2!} - \frac{t^3}{3(4!)} + \frac{t^5}{5(6!)} - \frac{t^7}{7(8!)} + \frac{t^9}{9(10!)} - \ldots\right)\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3(4!)} + \frac{x^5}{5(6!)} - \frac{x^7}{7(8!)} + \frac{x^9}{9(10!)} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)!} + \ldots$$

Par le critère généralisé de l'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+4)!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right|$$

$$= x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)!}{(2n+3)(2n+4)!}$$

$$= x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)}{(2n+4)(2n+3)^2}$$

$$= x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(2+\dfrac{4}{n}\right)(2n+3)^2} = 0$$

la série converge pour $x \in \mathbb{R}$, d'où $I = -\infty, +\infty$.

b) $f(0{,}5) = \dfrac{0{,}5}{2!} - \dfrac{(0{,}5)^3}{3(4!)} + \dfrac{(0{,}5)^5}{5(6!)} - \dfrac{(0{,}5)^7}{7(8!)} + \dfrac{(0{,}5)^9}{9(10!)} - \ldots$

Puisque $\dfrac{(0{,}5)^7}{7(8!)} = 2{,}768\ldots(10^{-8}) > 10^{-8}$

et que $\dfrac{(0{,}5)^9}{9(10!)} = 5{,}98\ldots(10^{-11}) < 10^{-8}$,

nous avons

$f(0{,}5) \approx \dfrac{0{,}5}{2!} - \dfrac{(0{,}5)^3}{3(4!)} + \dfrac{(0{,}5)^5}{5(6!)} - \dfrac{(0{,}5)^7}{7(8!)}$,

où $E = \dfrac{(0{,}5)^9}{9(10!)} < 10^{-8}$

d'où $f(0{,}5) \approx 0{,}2482$, où $E < 10^{-8}$

26. a) Construisons une série géométrique de premier terme $a = 1$ et de raison $r = -x^4$, où $|x^4| < 1$, alors

$$1 + (-x^4) + (-x^4)^2 + (-x^4)^3 + \ldots + (-x^4)^n + \ldots = \frac{1}{1-(-x^4)}$$

Ainsi $\dfrac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + x^{16} - \ldots + (-x^4)^n + \ldots$

En intégrant les 2 membres

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - x^4 + x^8 - x^{12} + x^{16} - \ldots + (-x^4)^n + \ldots]\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{17}}{17} - \ldots\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{9} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}}{13} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{17}}{17} - \ldots\right]$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{9}, \text{ où } E \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}}{13} < 10^{-5}$$

$$\approx 0{,}493\,97$$

b) Nous savons que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

En remplaçant x par $\sqrt{x}$ dans le développement, nous obtenons

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \ldots,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

En intégrant les deux membres,

$$\int_0^{0,1} \cos\sqrt{x}\,dx = \int_0^{0,1} \left[1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \ldots\right] dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2(2!)} + \frac{x^3}{3(4!)} - \frac{x^4}{4(6!)} + \frac{x^5}{5(8!)} - \ldots\right]\Bigg|_0^{0,1}$$

$$\approx 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{4} + \frac{(0{,}1)^3}{72}, \text{ où } E \leq \frac{(0{,}1)^4}{2880} < 10^{-6}$$

$$\approx 0{,}097\,514$$

27. Montant injecté $M_1 = 6\,000\,000$

% de M_1 remis en circulation $M_2 = 6\,000\,000(0{,}80)$

% de M_2 remis en circulation $M_3 = 6\,000\,000(0{,}80)(0{,}80)$
$= 6\,000\,000(0{,}80)^2$

% de M_3 remis en circulation $M_4 = 6\,000\,000(0{,}80)^2(0{,}80)$
$= 6\,000\,000(0{,}80)^3$

% de M_4 remis en circulation $M_5 = 6\,000\,000(0{,}80)^4$

$\vdots$ $\vdots$

% de M_n remis en circulation $M_{n+1} = 6\,000\,000(0{,}80)^n$

$$S = 6\,000\,000 + 6\,000\,000(0{,}80) + 6\,000\,000(0{,}80)^2 + \ldots$$

$$= \frac{6\,000\,000}{1-(0{,}80)} \quad \left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où}\\ a = 6\,000\,000 \text{ et } r = 0{,}80\end{array}\right)$$

$$= 30\,000\,000\,\$$$

6

28. a) $d_A = 1000 + 10 + 0{,}1 + \ldots$

$= 1000 + 1000(0{,}01) + 1000(0{,}01)^2 + \ldots$

$= \dfrac{1000}{1-(0{,}01)}$ $\left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où}\\ a = 1000 \text{ et } r = 0{,}01\end{array}\right)$

$= 1010{,}\overline{10}$ m

$d_t = 10 + 0{,}1 + 0{,}001 + \ldots$

$= 10 + 10(0{,}01) + 10(0{,}01)^2 + \ldots$

$= \dfrac{10}{1-(0{,}01)}$ $\left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où}\\ a = 10 \text{ et } r = 0{,}01\end{array}\right)$

$= 10{,}\overline{10}$ m

b) Puisque Achille et la tortue étaient séparés de 1000 mètres et que $d_A - d_t = 1010{,}\overline{10} - 10{,}\overline{10} = 0$, la tortue aura parcouru $10{,}\overline{10}$ mètres avant qu'Achille ne la rejoigne.

c) temps $= \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$

$$t = \frac{1010{,}\overline{10} \text{ m}}{\left(\frac{15\,000}{60}\right) \text{m/min}}$$

d'où $t = 4{,}\overline{04}$ min

29. a) Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, alors $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

ainsi, à partir d'un certain indice m, $a_k < 1$, $\forall\ k > m$

nous avons alors $a_k^2 < a_k$, $\forall\ k > m$ (car $0 < a_k < 1$)

d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$ converge (par le critère de comparaison)

b) La réciproque est fausse ; en effet

$\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ diverge

6

Solutionnaire
Problèmes de synthèse

Chapitre 6 (page 395)

1. a) $$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$$

$$= \pi \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$= \pi$, donc convergente

b) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{x\to+\infty} (2x)^{\frac{1}{x}} \quad (\text{ind. } (+\infty)^0)$$

Soit $A = \lim_{x\to+\infty} (2x)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln A = \ln\left[\lim_{x\to+\infty} (2x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{x} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

$= 0$

Ainsi $A = e^0 = 1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n} = 1$, donc convergente

c) $$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \quad (\text{ind. } +\infty - \infty)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$= 0$, donc convergente

d) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2}$$

$= +\infty$, donc divergente

e) $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x \quad (\text{ind. } 1^{+\infty})$$

Soit $A = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

$$\ln A = \ln\left[\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \quad (\text{ind. } (+\infty)\cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}\left(\frac{-3}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$$

$= 3$

Ainsi $A = e^3$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = e^3$, donc convergente

2. a) Puisque $a_1 + a_2 = \frac{9}{2}$, alors $a_2 = \frac{9}{2} - a_1$

Ainsi
$$a_1\left(\frac{9}{2} - a_1\right) = \frac{9}{2}$$
$$2a_1^2 - 9a_1 + 9 = 0$$
$$(2a_1 - 3)(a_1 - 3) = 0$$
$$a_1 = \frac{3}{2} \text{ ou } a_1 = 3$$

En substituant ces valeurs dans $a_1 + a_2 = \frac{9}{2}$,

nous trouvons respectivement $a_2 = 3$ si $a_1 = \frac{3}{2}$

ou $a_2 = \frac{3}{2}$ si $a_1 = 3$

Puisque $\{|a_n|\}$ est décroissante, alors $a_1 = 3$ et $a_2 = \frac{3}{2}$.

Ainsi

$$a_3 = \frac{a_2}{-2} = \frac{\frac{3}{2}}{-2} = \frac{-3}{4}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{-2} = \frac{\frac{-3}{4}}{-2} = \frac{3}{8}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{-2} = \frac{\frac{3}{8}}{-2} = \frac{-3}{16}$$

d'où $\{a_n\} = \left\{3, \frac{3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{-3}{16}, \ldots\right\}$

b) Soit $S = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots$$

$$= a_1 + a_2 + \overbrace{\left(\frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{3}a_2\right)}^{a_3} + \overbrace{\left(\frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}a_3\right)}^{a_4} + \overbrace{\left(\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{3}a_5\right)}^{a_5} + \overbrace{\left(\frac{1}{4}a_4 + \frac{1}{3}a_5\right)}^{a_6} + \ldots$$

En regroupant,

$$S = a_1 + a_2 + \frac{1}{4}\underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots)}_{S} + \frac{1}{3}\underbrace{(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots)}_{(S - a_1)}$$

$$S = a_1 + a_2 + \frac{1}{4}S + \frac{1}{3}(S - a_1)$$

$$S = 1 + 1 + \frac{1}{4}S + \frac{1}{3}(S - 1) \quad (\text{car } a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 1)$$

$$12S = 24 + 3S + 4(S - 1)$$

$$5S = 20, \text{ donc } S = 4$$

d'où $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = 4$

3. a) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right) = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+3\sqrt{5}+3(5)+\left(\sqrt{5}\right)^3}{8} - \frac{1-3\sqrt{5}+3(5)-\left(\sqrt{5}\right)^3}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6\sqrt{5}+10\sqrt{5}}{8}\right) = 2$$

$$a_8 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8 = 21$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{12} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12} = 144$$

b) En a), nous avons démontré que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$, ce qui correspond aux trois premiers termes de la suite de Fibonacci. Il suffit de démontrer que $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ pour $n \geq 3$.

$$a_{n-2} + a_{n-1} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

$$= a_n$$

d'où a_n est le terme général de la suite de Fibonacci.

4. a) $\{f_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$, où $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3$$
$$a_3 = a_1a_2 = 2(3) = 2^1 3^1 = 2^{f_1}3^{f_2}$$
$$a_4 = a_2a_3 = 3\big(2(3)\big) = 2^1 3^2 = 2^{f_2}3^{f_3}$$
$$a_5 = a_3a_4 = \big(2(3)\big)(2^1 3^2) = 2^2 3^3 = 2^{f_3}3^{f_4}$$
$$a_6 = a_4a_5 = (2^1 3^2)(2^2 3^3) = 2^3 3^5 = 2^{f_4}3^{f_5}$$
$$a_7 = a_5a_6 = (2^{f_3}3^{f_4})(2^{f_4}3^{f_5}) = (2^{f_3}2^{f_4})(3^{f_4}3^{f_5}) = (2^{f_3+f_4})(3^{f_4+f_5}) = 2^{f_5}3^{f_6}$$

d'où $a_n = 2^{f_{n-2}}3^{f_{n-1}}$, $\forall\, n > 2$

b) Soit a, b, c et d quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci, alors $c = a + b$ et

$$d = b + c$$
$$d = a + 2b \quad (\text{car } c = a + b)$$

Déterminons k tel que

$$(cd - ab)^2 = (ad)^2 + (kbc)^2$$
$$\big((a+b)(a+2b) - ab\big)^2 = \big(a(a+2b)\big)^2 + k^2\big(b(a+b)\big)^2$$
$$(a^2 + 3ab + 2b^2 - ab)^2 = (a^2 + 2ab)^2 + k^2(ab + b^2)^2$$
$$(a^2 + 2ab + 2b^2)^2 = (a^2 + 2ab)^2 + k^2(a^2b^2 + 2ab^3 + b^4)$$
$$(a^2 + 2ab)^2 + 4b^2(a^2 + 2ab) + 4b^4 = (a^2 + 2ab)^2 + k^2(a^2b^2 + 2ab^3 + b^4)$$
$$4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 = k^2(a^2b^2 + 2ab^3 + b^4)$$
$$4(a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = k^2(a^2b^2 + 2ab^3 + b^4)$$

$k^2 = 4$, donc $k = -2$ ou $k = 2$

c) i) Pour les termes $\{\ldots, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$
En posant $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 8$ et $k = 2$ (ou -2) dans l'équation
$(cd - ab)^2 = (ad)^2 + (kbc)^2$, nous obtenons

$$(5 \times 8 - 2 \times 3)^2 = (2 \times 8)^2 + (2 \times 3 \times 5)^2$$
$$34^2 = 16^2 + 30^2$$

D'où les dimensions sont 34, 16 et 30.

ii) Pour les termes $\{\ldots, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$
En posant
$a = 13$, $b = 21$, $c = 34$, $d = 55$ et $k = 2$ (ou -2)
dans l'équation précédente, nous obtenons

$$(34 \times 55 - 13 \times 21)^2 = (13 \times 55)^2 + (2 \times 21 \times 34)^2$$
$$1597^2 = 715^2 + 1428^2$$

D'où les dimensions sont 1597, 715 et 1428.

5. Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1}$, où $|r| < 1$, telle que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1} = 3 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} a^3 r^{3(i-1)} = 81$$

$$\frac{a}{1-r} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{a^3}{1-r^3} = 81$$

$$a = 3(1-r) \quad \text{et} \quad a^3 = 81(1-r^3)$$

En remplaçant a par $3(1-r)$ dans $a^3 = 81(1-r^3)$

$$\big(3(1-r)\big)^3 = 81(1-r^3)$$
$$27(1-r)^3 = 81(1-r)(1+r+r^2)$$
$$(1-r)^2 = 3(1+r+r^2)$$
$$1 - 2r + r^2 = 3 + 3r + 3r^2$$
$$2r^2 + 5r + 2 = 0$$

$r = \frac{-1}{2}$ ou $r = -2$ (à rejeter car $|r| < 1$)

En remplaçant r par $\frac{-1}{2}$ dans $a = 3(1-r)$,

nous obtenons $a = 3\left(\frac{3}{2}\right)$, donc $a = \frac{9}{2}$

$$\text{ainsi } \sum_{i=1}^{+\infty} a^2 r^{2(i-1)} = \frac{a^2}{1-r^2} = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = 27$$

d'où $S = 27$

6. a) $S_n = \sum_{j=1}^{n} (-j)^3$

$$= (-1)^3 + (-2)^3 + (-3)^3 + \ldots + (-n)^3$$
$$= -[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3]$$
$$= \frac{-n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2(n+1)^2}{4} = -\infty$$

d'où la série diverge.

b) $S_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j 2j$

Il faut étudier les cas où n est pair et n est impair.

Si n est pair,

$$S_n = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 - \ldots - 2(n-1) + 2n$$
$$= (-2+4) + (-6+8) + (-10+12) + \ldots + (-2n+2+2n)$$
$$= 2 + 2 + 2 + \ldots + 2$$
$$= 2\left(\frac{n}{2}\right) \quad \left(\text{car il y a } \left(\frac{n}{2}\right) \text{ termes égaux à } 2\right)$$
$$= n$$

Si n est impair,

$$S_n = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 - \ldots - 2(n-2) + 2(n-1) - 2n$$
$$= (-2+4) + (-6+8) + (-10+12) + \ldots + (-2n+4+2n-2) - 2n$$
$$= (2 + 2 + 2 + \ldots + 2) - 2n$$
$$= 2\left(\frac{n-1}{2}\right) - 2n \quad \left(\text{car il y a } \left(\frac{n-1}{2}\right) \text{ termes égaux à } 2\right)$$
$$= n - 1 - 2n$$
$$= -(n+1)$$

$$\text{d'où } S_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Lorsque n est pair

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Lorsque n est impair

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -(n+1) = -\infty$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas,
d'où S n'est pas définie et la série diverge.

c) $S_n = 3 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}}$, si $n \geq 3$

$$= 3 + 4 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}}\right)$$
$$= 3 + 4 + \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}{1-\frac{1}{2}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où} \\ a = 1 \text{ et } r = \frac{1}{2}\end{array}\right)$$
$$= 7 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right), \text{ si } n \geq 3$$

$$S = \lim_{n\to+\infty}\left[7 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)\right]$$
$$= 7 + 2(1-0)$$
$$= 9$$

d'où la série converge.

6

d) $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{i^2+4i+3}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{(i+1)(i+3)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+3}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+$

$\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$

$S = \lim_{n\to+\infty} S_n$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{5}{6}$

d'où la série converge.

7. a) Soit $a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)$

où $a+d = 192$ ①

et $5a+10d = 920$ ②

$5\times$ ① $-1\times$ ②: $-5d = 40$

$d = -8$

Puisque $a+d = 192$

$a-8 = 192$

donc $a = 200$

$S_n = 2072$

$na+\frac{(n-1)nd}{2} = 2072$

$200n+(n-1)n(-4) = 2072$

$4n^2-204n+2072 = 0$

Ainsi $n = \frac{204\pm\sqrt{(-204)^2-4(4)2072}}{8}$

d'où $n = 14$ ou $n = 37$

b) ① $a+8d = 7$

$S_7 = 7S_{11}$

$7a+\frac{6(7)d}{2} = 7\left(11a+\frac{10(11)}{2}d\right)$

$7a+21d = 77a+385d$

② $70a+364d = 0$

$70\times$ ① $-1\times$ ②: $196d = 490$

$d = \frac{490}{196} = \frac{5}{2}$

Puisque $a+8d = 7$

$a+8\left(\frac{5}{2}\right) = 7$

$a = -13$

d'où $a = -13$ et $d = \frac{5}{2}$

8. a) Critère de d'Alembert

$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)10^n}{n10^{n+1}}$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{10}$

$=\frac{1}{10}$

$R<1$, donc la série converge.

Soit $S = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{10^i}$

$S = \frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\ldots+\frac{n-1}{10^{n-1}}+\frac{n}{10^n}+\ldots$

$\frac{1}{10}S = \frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{4}{10^5}+\ldots+\frac{n-1}{10^n}+\frac{n}{10^{n+1}}+\ldots$

$S-\frac{1}{10}S = \frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$

$\frac{9}{10}S = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où}\\ a=\frac{1}{10}\text{ et } r=\frac{1}{10}\end{array}\right)$

$\frac{9}{10}S = \frac{1}{9}$

d'où $S = \frac{10}{81}$

b) Critère de d'Alembert

$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{k^{n+1}}}{\frac{n}{k^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)k^n}{nk^{n+1}}$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{k}$

$=\frac{1}{k}$

Puisque $k>1$, $R<1$, donc la série converge.

Soit $S = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{k^i}$

$S = \frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{3}{k^3}+\frac{4}{k^4}+\ldots+\frac{n-1}{k^{n-1}}+\frac{n}{k^n}+\ldots$

$\frac{1}{k}S = \frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^3}+\frac{3}{k^4}+\frac{4}{k^5}+\ldots+\frac{n-1}{k^n}+\frac{n}{k^{n+1}}+\ldots$

$S-\frac{1}{k}S = \frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^4}+\ldots+\frac{1}{k^n}+\ldots$

$\left(\frac{k-1}{k}\right)S = \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{série géométrique où}\\ a=\frac{1}{k}\text{ et } r=\frac{1}{k}\end{array}\right)$

$\frac{k-1}{k}S = \frac{1}{k-1}$

d'où $S = \frac{k}{(k-1)^2}$

6

9. a) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e}$$

$R < 1$, d'où la série converge.

b) Critère de comparaison

Puisque $\dfrac{8}{4+\ln n} \geq \dfrac{8}{4+n}$, pour $n \geq 1$ (car $\ln n < n$)

et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{4+n}$ diverge

(critère des polynômes, $d = 1 - 0 = 1 \geq 1$)

alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{4+\ln n}$ diverge.

c) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(n!)^2}{[(n+1)n!]^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= 4$$

$R > 1$, d'où la série diverge.

d) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{[2(n+1)]!}{[(n+1)^2]!}}{\dfrac{(2n)!}{(n^2)!}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(n^2)!}{[(n+1)^2]!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(n^2)!}{(n+1)^2[(n+1)^2-1][(n+1)^2-2]\ldots[n^2+1](n^2)!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2[(n+1)^2-1]\ldots[n^2+1]}$$

$$= 0$$

$R < 1$, d'où la série converge.

e) Critère de comparaison

Puisque $\dfrac{\ln k}{k^2} \leq \dfrac{\sqrt{k}}{k^2}$, pour $k \geq 2$ $\left(\text{car } \ln k < \sqrt{k}\right)$

et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge

$\left(\text{série de Riemann où } p = \dfrac{3}{2} > 1\right)$

alors $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge.

f) Critère de Cauchy

$$R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e}$$

$R < 1$, d'où la série converge.

g) Critère de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$$

$$\left(u = \operatorname{Arc\,tan}\sqrt{x}\right)$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\left(\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{x}\right)^2\right]\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\left(\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{M}\right)^2 - \left(\operatorname{Arc\,tan} 1\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3\pi^2}{16}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{k}}{\sqrt{k}(k+1)}$ converge.

h) Critère de comparaison

Puisque $\dfrac{k+\dfrac{3}{k}}{\sqrt{k^5+\ln k}} \leq \dfrac{4k}{\sqrt{k^5}}$, pour $k \geq 1$

$\left(\text{car } \left(k+\dfrac{3}{k}\right) \leq 4k \text{ et } (k^5+\ln k) \geq k^5\right)$

et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k}{\sqrt{k^5}} = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge

$\left(\text{série de Riemann où } p = \dfrac{3}{2} > 1\right)$

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+\dfrac{3}{k}}{\sqrt{k^5+\ln k}}$ converge.

i) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2n+2}}{2(n+1)(2n+1)n^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2n+1}}{2(2n+1)n^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{2(2n+1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4n+2}\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(e^2)$$

$$= \frac{e^2}{4}$$

$R > 1$, donc la série diverge.

j) Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\dfrac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}(n!)^2}{[(n+1)n!]^2\, n^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)n^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$= 0(e)$$

$$= 0$$

$R < 1$, donc la série converge.

k) Critère de comparaison

Puisque $\dfrac{1}{k\sqrt[k]{k}} \geq \dfrac{1}{2k}$, pour $k \geq 1$ $\quad\left(\text{car } \sqrt[k]{k} < 2\right)$

et que $\displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{k}$ diverge (série harmonique)

donc $\displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$ diverge.

l) Sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(-1)^k 2k} = -1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{13} + \ldots$$

Déterminons une expression pour S_n

$$S_n = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{2n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Lorsque n est pair, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) = -1$,

lorsque n est impair, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(-1) = -1$.

Ainsi $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = -1$, donc la série converge.

10. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left[1-(-1)^{k+1}\right]x^k}{k^2} = 2x + \frac{2x^3}{3^2} + \frac{2x^5}{5^2} + \frac{2x^7}{7^2} + \ldots$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^{(2k-1)}}{(2k-1)^2}$$

Critère généralisé de d'Alembert, pour $x \neq 0$

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{2x^{(2n+1)}}{(2n+1)^2}}{\dfrac{2x^{(2n-1)}}{(2n-1)^2}}\right| = x^2 \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)^2}$$

$$= x^2 \quad \left(\text{car } \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)^2} = 1\right)$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $x^2 < 1$, donc $-1 < x < 1$, la série converge.

Lorsque $R > 1$, c'est-à-dire $x^2 > 1$, donc $x < -1$ ou $x > 1$, la série diverge.

Lorsque $R = 1$, c'est-à-dire $x^2 = 1$, nous obtenons

si $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{(2k-1)^2}$ est une série convergente

(critère du polynôme, où $d = 2 > 1$) ;

si $x = -1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-2}{(2k-1)^2}$ est une série convergente

(même raison) ;

d'où l'intervalle de convergence est $[-1, 1]$ et $r = 1$.

b) Critère généralisé de Cauchy

$$R = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(ax-b)^n}{c^n}\right|} = \frac{|ax-b|}{c}$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $\dfrac{|ax-b|}{c} < 1$,

donc $\dfrac{b-c}{a} < x < \dfrac{b+c}{a}$, la série converge.

Lorsque $R > 1$, c'est-à-dire $x < \dfrac{b-c}{a}$ ou $x > \dfrac{b+c}{a}$, la série diverge.

Lorsque $R = 1$, nous obtenons :

si $x = \dfrac{b-c}{a}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(ax-b)^k}{c^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-c)^k}{c^k} = 1 - 1 + 1 + \ldots,$$

série divergente ;

si $x = \dfrac{b+c}{a}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(ax-b)^k}{c^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{c^k}{c^k} = 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

série divergente ;

d'où l'intervalle de convergence est $\left]\dfrac{b-c}{a}, \dfrac{b+c}{a}\right[$

et $r = \dfrac{c}{a}$ $\quad\left(\text{car } r = \dfrac{\dfrac{b+c}{a} - \dfrac{b-c}{a}}{2}\right)$

6

11. Critère généralisé de d'Alembert, pour $x \neq 0$

a) $$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n x^n}{n!}}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
$$= |x|e$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $|x|e < 1$,

donc $|x| < \dfrac{1}{e}$, la série converge ;

lorsque $R > 1$, c'est-à-dire $|x|e > 1$,

donc $|x| > \dfrac{1}{e}$, la série diverge ;

d'où le rayon de convergence $r = \dfrac{1}{e}$.

b) $$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(n+1)!\,x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!\,x^n}{n^n}}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$$
$$= \frac{|x|}{e}$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $\dfrac{|x|}{e} < 1$, donc $|x| < e$,
la série converge ;

lorsque $R > 1$, c'est-à-dire $\dfrac{|x|}{e} > 1$, donc $|x| > e$,
la série diverge ;

d'où le rayon de convergence $r = e$.

12. a) Critère généralisé de d'Alembert, pour $x \neq 0$

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)x^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\,x^n}}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{|x|}$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{|x|} < 1$, donc $x < -1$ ou $x > 1$,
la série converge.

Lorsque $R > 1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{|x|} > 1$, donc $-1 < x < 1$,
la série diverge.

Lorsque $R = 1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{|x|} = 1$,

si $x = -1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{kx^k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ldots$,

série convergente ;

si $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{kx^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$,

série divergente ;

d'où la série converge si $x \in -\infty, -1] \cup]1, +\infty$.

b) Critère généralisé de d'Alembert, pour $x \neq \dfrac{3}{7}$

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^2(3x-7)^{n+1}}}{\dfrac{1}{n^2(3x-7)^n}}\right| = \frac{1}{|3x-7|}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{1}{|3x-7|}$$

Lorsque $R < 1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{|3x-7|} < 1$, donc $x < 2$
ou $x > \dfrac{8}{3}$, la série converge.

Lorsque $R = 1$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = \dfrac{8}{3}$,
nous obtenons :

si $x = 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$, qui est une série convergente ;

si $x = \dfrac{8}{3}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, qui est une série convergente ;

d'où la série converge si $x \in -\infty, 2] \cup \left[\dfrac{8}{3}, +\infty\right.$.

c) Critère généralisé de d'Alembert, pour $x \neq 0$

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(1+1)!\,x^{n+1}}}{\dfrac{1}{n!\,x^n}}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

$R < 1$, pour tout $x \neq 0$, d'où la série converge
si $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d) Critère de Cauchy, pour $x \neq 0$

$$R = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{x^n}\right|} = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$R > 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, donc la série diverge $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
d'où il n'y a aucune valeur de x où la série converge.

13. a) $$\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^5}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{2}{x^5}\,dx$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{-1}{2x^4}\Big|_1^M\right]$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{-1}{2M^4} + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}$$

d'où la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k^5}$ converge.

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M xe^{-x^2}\,dx$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\Big|_1^M\right]$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{-1}{2e^{M^2}} + \frac{1}{2e}\right]$$
$$= \frac{1}{2e}$$

d'où la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k^2}$ converge.

6

b) À l'aide du corollaire du critère de l'intégrale, nous avons :

pour la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^5}$,

$$b = a_1 = \frac{2}{(1)^5} = 2$$

$$c = a_1 + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^5}\,dx = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$$

d'où $2 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^5} \leq 2{,}5$;

pour la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k^2}$,

$$b = a_1 = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$c = a_1 + \int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} = \frac{3}{2e}$$

d'où $\dfrac{1}{e} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k^2} \leq \frac{3}{2e}$;

c'est-à-dire $0{,}3678\ldots \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k^2} \leq 0{,}5518\ldots$

c) > Sum(2/k^5,k=1..infinity)=evalf(sum(2/k^5,k=1..infinity));

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\frac{1}{k^5}\right) = 2.073855510$$

> Sum(k*exp(-k^2),k=1..infinity)=evalf(sum(k*exp(-k^2), k=1..infinity));

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{(-k^2)} = 0.4048813986$$

14. Critère de l'intégrale

1er cas : si $p = 1$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du \qquad (u = \ln x)$$
$$= \ln|u| + C$$
$$= \ln|\ln x| + C$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^{M} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\ln|\ln x|\right)\Big|_2^M$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\ln|\ln M| - \ln|\ln 2|\right)$$
$$= +\infty$$

2e cas : si $p \neq 1$

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int \frac{1}{u^p}\,du \qquad (u = \ln x)$$
$$= \frac{u^{-p+1}}{-p+1} + C$$
$$= \frac{1}{(1-p)(\ln x)^{p-1}} + C$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^{M} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{(1-p)(\ln x)^{p-1}}\right]\Bigg|_2^M$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{(1-p)(\ln M)^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)(\ln 2)^{p-1}}\right]$$

Cette limite égale $+\infty$ si $p < 1$ et $\dfrac{-1}{(1-p)(\ln 2)^{p-1}}$ si $p > 1$,

$$\text{donc } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } p \leq 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}} & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

d'où la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ converge si $p > 1$.

15. a) Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{\frac{x}{10}}}$. Le critère de l'intégrale peut être utilisé si f est positive, continue et décroissante.

f est positive et continue, vérifions si f est décroissante.

$$f'(x) = 2xe^{\frac{-x}{10}} + x^2\left(e^{\frac{-x}{10}}\right)\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$= xe^{\frac{-x}{10}}\left(\frac{20-x}{10}\right)$$

$f'(x) < 0$ si $x > 20$

Donc f est décroissante si $x \in [20, +\infty$

Nous pouvons appliquer le critère de l'intégrale pour $c = 20$.

b) Calculons $\displaystyle\int x^2 e^{\frac{-x}{10}}\,dx$.

$u = x^2$ $du = 2x\,dx$	$dv = e^{\frac{-x}{10}}\,dx$ $v = -10e^{\frac{-x}{10}}$

$$\int x^2 e^{\frac{-x}{10}}\,dx = -10x^2 e^{\frac{-x}{10}} + 20\int xe^{\frac{-x}{10}}\,dx$$

$u = x$ $du = dx$	$dv = e^{\frac{-x}{10}}\,dx$ $v = -10e^{\frac{-x}{10}}$

$$\int x^2 e^{\frac{-x}{10}}\,dx = -10x^2 e^{\frac{-x}{10}} + 20\left(-10xe^{\frac{-x}{10}} + 10\int e^{\frac{-x}{10}}\,dx\right)$$
$$= \frac{-10x^2}{e^{\frac{x}{10}}} - \frac{200x}{e^{\frac{x}{10}}} - \frac{2000}{e^{\frac{x}{10}}} + C$$

$$\int_{20}^{+\infty} x^2 e^{\frac{-x}{10}}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{20}^{M} x^2 e^{\frac{-x}{10}}\,dx$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\frac{-10x^2}{e^{\frac{x}{10}}} - \frac{200x}{e^{\frac{x}{10}}} - \frac{2000}{e^{\frac{x}{10}}}\right)\Bigg|_{20}^{M}$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\left(\frac{-10M^2}{e^{\frac{M}{10}}} - \frac{200M}{e^{\frac{M}{10}}} - \frac{2000}{e^{\frac{M}{10}}}\right) + \frac{10\,000}{e^2}\right]$$

6

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{-10M^2}{e^{\frac{M}{10}}} + \lim_{M\to+\infty} \frac{-200M}{e^{\frac{M}{10}}} - 0 + \frac{10\,000}{e^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{M\to+\infty} \frac{-200M}{e^{\frac{M}{10}}} + \lim_{M\to+\infty} \frac{-2000}{e^{\frac{M}{10}}} + \frac{10\,000}{e^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{M\to+\infty} \frac{-2000}{e^{\frac{M}{10}}} + 0 + \frac{10\,000}{e^2}$$

$$= \frac{10\,000}{e^2}$$

c) Puisque $\int_{20}^{+\infty}$ converge, $\sum_{k=20}^{+\infty} \frac{k^2}{e^{\frac{k}{10}}}$ converge.

16. Appliquons d'abord le critère généralisé de Cauchy à la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

$$R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Soit $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = C$ où $C \in \mathbb{R}$

Ainsi $R = |x|C$

Si $C = 0$, alors $|x|0 < 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$, ainsi $r = +\infty$

Si $C \neq 0$, alors $R < 1$ pour $|x|C < 1$, et la série converge pour $|x| < \dfrac{1}{C}$.

Lorsque $R > 1$, c'est-à-dire $|x|C > 1$ et $C \neq 0$, alors la série diverge pour $|x| > \dfrac{1}{C}$.

Donc, le rayon de convergence r est défini comme suit :

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{C} & \text{si } C \neq 0 \\ +\infty & \text{si } C = 0 \end{cases}$$

Appliquons maintenant le critère généralisé de Cauchy à la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{mk}$.

$$R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n x^{mn}|} = |x|^m \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x|^m C$$

Si $C = 0$, alors $R < 1$ et la série converge, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ainsi $r_1 = +\infty$.

Si $C \neq 0$, alors $R < 1$ pour $|x|^m C < 1$, et la série converge pour $|x|^m < \dfrac{1}{C}$, c'est-à-dire $|x| < \sqrt[m]{\dfrac{1}{C}}$.

Lorsque $R > 1$, c'est-à-dire $|x|^m C > 1$, alors la série diverge pour $|x|^m > \dfrac{1}{C}$, c'est-à-dire $|x| > \sqrt[m]{\dfrac{1}{C}}$.

Donc le rayon de convergence r_1 de cette série est défini comme suit :

$$r_1 = \begin{cases} \sqrt[m]{\dfrac{1}{C}} & \text{si } C \neq 0 \\ +\infty & \text{si } C = 0 \end{cases}$$

d'où le rayon de convergence demandé est $\sqrt[m]{r}$.

17. a) Soit $x = 4$ et $f(x) = \sqrt{x}$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Lorsque $x = 4$ et $dx = 4{,}3 - 4 = 0{,}3$, nous avons

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0{,}3) = 0{,}075$$

Ainsi $\sqrt{4{,}3} \approx \sqrt{4} + dy$
$\approx 2 + 0{,}075$
$\approx 2{,}075$

b)

$f(x) = \sqrt{x}$	$f(4) = 2$
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(4) = \dfrac{1}{2^2}$
$f''(x) = \dfrac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$	$f''(4) = \dfrac{-1}{2^5}$
$f'''(x) = \dfrac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$	$f'''(4) = \dfrac{3}{2^8}$
$f^{(4)}(x) = \dfrac{-15}{16x^{\frac{7}{2}}}$	$f^{(4)}(4) = \dfrac{-15}{2^{11}}$

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{(x-4)}{2^2} - \frac{(x-4)^2}{2^5 2!} + \frac{3(x-4)^3}{2^8 3!} - \frac{15(x-4)^4}{2^{11} 4!} + \dots$$

c) En remplaçant x par 4,3, nous obtenons

$$\sqrt{4{,}3} \approx 2 + \frac{(0{,}3)}{2^2} - \frac{(0{,}3)^2}{2^5 2!} + \frac{3(0{,}3)^3}{2^8 3!}$$

avec $E \leq \dfrac{15(0{,}3)^4}{2^{11} 4!}$;

$\sqrt{4{,}3} \approx 2{,}073\,646\dots$ avec $E \leq 2{,}5 \times 10^{-6}$

18. Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

a) $V_{0X} = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} (e^{-x^4})^2\,dx$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2x^4}\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \left[1 - 2x^4 + \frac{(2x^4)^2}{2!} - \frac{(2x^4)^3}{3!} + \dots\right] dx$$

(de (1), en remplaçant x par $(-2x^4)$)

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \left[1 - 2x^4 + \frac{4x^8}{2!} - \frac{8x^{12}}{3!} + \dots\right] dx$$

$$= \pi\left[x - \frac{2x^5}{5} + \frac{4x^9}{2!9} + \frac{8x^{13}}{3!13} - \dots\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx \pi\left[\frac{1}{2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^9}{2!9}\right], \text{ où } E \leq \frac{\pi 8\left(\frac{1}{2}\right)^{13}}{3!13}$$

$\approx 1{,}532\,8\dots$ u³, où $E \leq 0{,}000\,039\dots$

b) $V_{0Y} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x\, e^{-x^4}\, dx$

$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x \left[1 - x^4 + \frac{(x^4)^2}{2!} - \frac{(x^4)^3}{3!} + \ldots\right] dx$

(de ①, en remplaçant x par $(-x^4)$)

$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x - x^5 + \frac{x^9}{2!} - \frac{x^{13}}{3!} + \ldots\right] dx$

$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{2!10} - \frac{x^{14}}{3!14} + \ldots\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$

$\approx 2\pi \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{2!10}\right]$, où $E \leq 2\pi \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{14}}{3!14}$

$\approx 0{,}769\,34\ldots$ u^3, où $E \leq 0{,}000\,004\,5\ldots$

19. $A = \sum_{k=0}^{+\infty} 100(1 + 0{,}01)^{-k}$ (car $V = 100$ et $i = 0{,}01$)

$= \sum_{k=0}^{+\infty} 100\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^k$

$= \frac{100}{1 - \frac{1}{1{,}01}}$ (série géométrique où $a = 100$ et $r = \frac{1}{1{,}01}$)

$= 10\,100$

d'où $A = 10\,100$ \$

20. a) $f(n+1) = kf(n) + f(n) = f(n)(k+1)$

$f(1) = f(0)(k+1)$, d'où $f(1) = 100(k+1)$

$f(2) = f(1)(k+1)$

$= [100(k+1)](k+1)$, d'où $f(2) = 100(k+1)^2$

$f(3) = f(2)(k+1)$

$= [100(k+1)^2](k+1)$, d'où $f(3) = 100(k+1)^3$

b) De façon générale, $f(n) = 100(k+1)^n$

c) Soit $S_A(n)$, l'indice des salaires du pays A et $S_B(n)$, l'indice des salaires du pays B.

$S_A(n) = 100(1{,}05)^n$ (car $k = 0{,}05$)

d'où $S_A(6) = 100(1{,}05)^6 \approx 134{,}01$

$S_B(n) = 100(1{,}08)^n$ (car $k = 0{,}08$)

d'où $S_B(6) = 100(1{,}08)^6 \approx 158{,}69$

d) Pour le pays A, $S_A(n) = 200$

$100(1{,}05)^n = 200$

$n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$ ans

Pour le pays B, $S_B(n) = 200$

$100(1{,}08)^n = 200$

$n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}08} \approx 9$ ans

e) Pour le pays A, soit $a_n = \frac{S_A(n)}{P_A(n)}$

Ainsi $a_n = \frac{100(1{,}05)^n}{100(1{,}04)^n} = \left(\frac{1{,}05}{1{,}04}\right)^n$

d'où $a_0 = 1$; $a_3 = 1{,}029\ldots$; $a_6 = 1{,}059\ldots$

Pour le pays B, soit $b_n = \frac{S_B(n)}{P_B(n)} = \left(\frac{1{,}08}{1{,}09}\right)^n$

d'où $b_0 = 1$; $b_3 = 0{,}972\ldots$; $b_6 = 0{,}946\ldots$

21. Les 5e, 7e et 12e termes d'une série arithmétique, de premier terme a et de raison d, sont donnés par $a_5 = a + 4d$, $a_7 = a + 6d$ et $a_{12} = a + 11d$. Puisque ces termes sont des termes consécutifs d'une série géométrique de raison r, nous avons deux possibilités :

1er cas : $a_7 = ra_5$

$a + 6d = r(a + 4d)$, ainsi $a + 6d = ra + 4rd$ ①

$a_{12} = ra_7$

$a + 11d = r(a + 6d)$, ainsi $a + 11d = ra + 6rd$ ②

En effectuant ② − ①, $5d = 2rd$

d'où $r = \frac{5}{2}$

2e cas : $a_7 = ra_{12}$

$a + 6d = r(a + 11d)$, ainsi $a + 6d = ra + 11rd$ ③

$a_5 = ra_7$

$a + 4d = r(a + 6d)$, ainsi $a + 4d = ra + 6rd$ ④

En effectuant ③ − ④, $2d = 5rd$

d'où $r = \frac{2}{5}$

22. $a_1 + a_2 = 60$

$a_1 + a_1 r = 60$ ①

$S = \frac{a_1}{1 - r} = 64$

$a_1 = 64(1 - r)$ ②

En remplaçant a_1 par $64(1 - r)$ dans ①, nous obtenons

$64(1 - r) + 64(1 - r)r = 60$

$64 - 64r + 64r - 64r^2 = 60$

$64r^2 - 4 = 0$

$(8r - 2)(8r + 2) = 0$

$r = \frac{1}{4}$ ou $r = \frac{-1}{4}$

Si $r = \frac{1}{4}$, alors $a_1 = 64\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 48$

Si $r = \frac{-1}{4}$, alors $a_1 = 64\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 80$

23. a) Soit $r \neq 0$ la raison de la série géométrique et soit

$a_1 = \frac{k}{r^2}$, $a_2 = \frac{k}{r}$, $a_3 = k$, $a_4 = kr$ et $a_5 = kr^2$.

Nous avons

$S = a_1 + a_5$, ainsi $\frac{k}{r^2} + kr^2 = S$ ①

$s = a_2 + a_4$, ainsi $\frac{k}{r} + kr = s$ ②

6

Évaluons $kS + 2k^2$.

$$\begin{aligned}
kS + 2k^2 &= k\left(\frac{k}{r^2} + kr^2\right) + 2k^2 \qquad (\text{de } ①)\\
&= \frac{k^2}{r^2} + k^2r^2 + 2k^2\\
&= \frac{k^2}{r^2} + 2k^2 + k^2r^2\\
&= \left(\frac{k}{r} + kr\right)^2
\end{aligned}$$

d'où $kS + 2k^2 = s^2$ (de ②)

b) En remplaçant s par $\frac{26}{3}$ et S par $\frac{97}{9}$, nous obtenons

$k\left(\frac{97}{9}\right) + 2k^2 = \left(\frac{26}{3}\right)^2$, ainsi $18k^2 + 97k - 676 = 0$

Donc $k = 4$ ou $k = -9{,}38\ldots$ (à rejeter)

En substituant $k = 4$ dans ②, nous obtenons

$$\frac{4}{r} + 4k = \frac{26}{3}$$

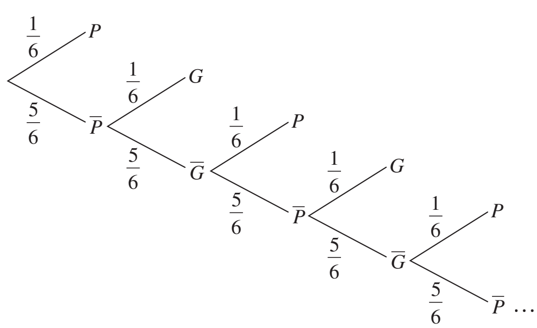
Ainsi $6r^2 - 13r + 6 = 0$, donc $r = \frac{2}{3}$ ou $r = \frac{3}{2}$

Lorsque $r = \frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{16}{9}$ et lorsque $r = \frac{2}{3}$, $a_1 = 9$

24. Nous allons d'abord construire un diagramme en arbre indiquant les probabilités de gagner de chacun à chaque étape.

P signifie que Pierre gagne.
$\overline{P}$ signifie que Pierre ne gagne pas.
G signifie que Gilles gagne.
$\overline{G}$ signifie que Gilles ne gagne pas.

a)

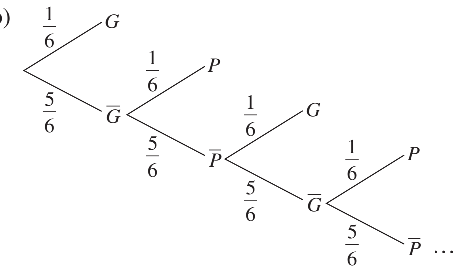


Probabilité que Pierre gagne

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6\frac{1}{6} + \ldots\\
&= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \qquad \left(\text{série géométrique où } a = \frac{1}{6} \text{ et } r = \frac{5}{6}\right)
\end{aligned}$$

d'où $P_1 = \frac{6}{11}$

b)

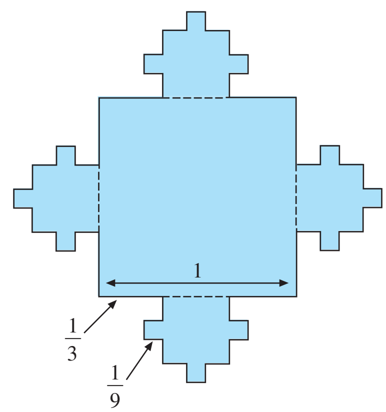


Probabilité que Pierre gagne

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots\\
&= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \qquad \left(\text{série géométrique où } \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \text{ et } r = \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

d'où $P_2 = \frac{5}{11}$

25.



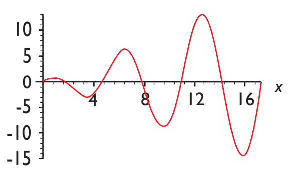
a)
$$\begin{aligned}
A &= 1 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 36\left(\frac{1}{27}\right)^2 + 108\left(\frac{1}{81}\right)^2 + \ldots\\
&= 1 + 4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 3^2\left(\frac{1}{3}\right)^6 + 3^3\left(\frac{1}{3}\right)^8 + \ldots\right]\\
&= 1 + 4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right]\\
&= 1 + 4\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)}\right] \qquad \left(\text{série géométrique où } a = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ et } r = \left(\frac{1}{3}\right)\right)\\
&= 1 + 4\left(\frac{1}{6}\right)\\
&= \frac{5}{3}, \text{ d'où } A = \frac{5}{3}\ \text{m}^2
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
L &= \left[8\left(\frac{1}{3}\right) + 24\left(\frac{1}{9}\right) + 72\left(\frac{1}{27}\right) + \ldots\right]\\
&= 8\left[\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right) + 9\left(\frac{1}{27}\right) + \ldots\right]\\
&= 8\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3} + \ldots\right]\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

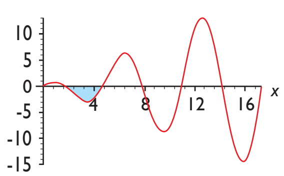
c) $$\begin{aligned} A_{10} &= 1 + 4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right] \\ &= 1 + \frac{4}{9}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^8\right] \\ &= 1 + \frac{4}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^9}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right) \\ &= 1{,}666\,632\ldots \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{10} &= \left[8\left(\frac{1}{3}\right) + 24\left(\frac{1}{3^2}\right) + 72\left(\frac{1}{3^3}\right) + \ldots + 8\cdot 3^9\left(\frac{1}{3^{10}}\right)\right] + 4\cdot 3^9\left(\frac{1}{3^{10}}\right) \\ &= 8\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3}\right] + \frac{4}{3} \\ &= \frac{84}{3}, \text{ d'où } L_{10} = 28 \text{ m} \end{aligned}$$

26. a) > plot(x*cos(x),x=0..11*Pi/2);



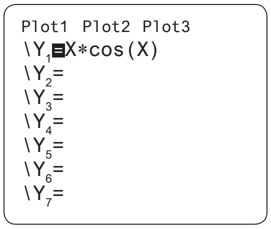
b) > with(plots):
> c:=plot(x*cos(x),x=0..11*Pi/2):
> A1:=plot(x*cos(x),x=Pi/2..3*Pi/2,filled=true,color=turquoise):
> display(c,A1);

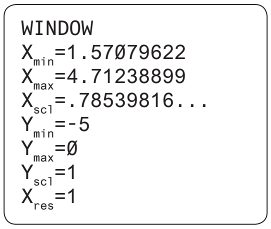


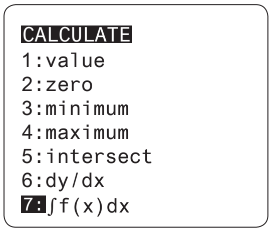
$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (0 - x\cos x)\, dx \\ &= -(x\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= 2\pi \text{ u}^2 \end{aligned}$$

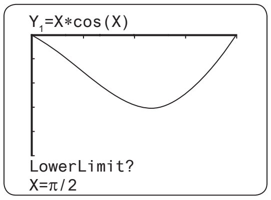
Vérification du calcul de A_1

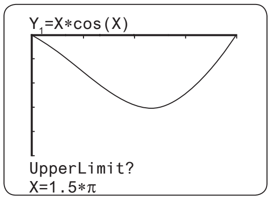
Calcul de A_1

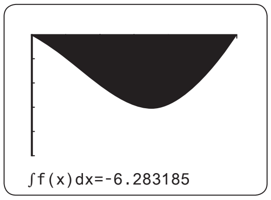






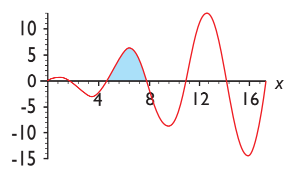






d'où $A_1 = 2\pi$ u²

> A2:=plot(x*cos(x),x=3*Pi/2..5*Pi/2,filled=true,color=turquoise):
> display(c,A2);

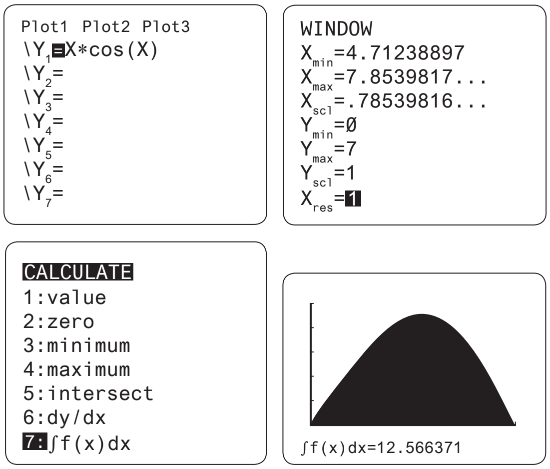


$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} x\cos x\, dx \\ &= (x\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \\ &= 4\pi \text{ u}^2 \end{aligned}$$

6

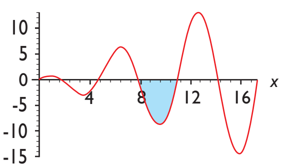
Vérification du calcul de A_2

Calcul de A_2



d'où $A_2 = 4\pi \text{ u}^2$

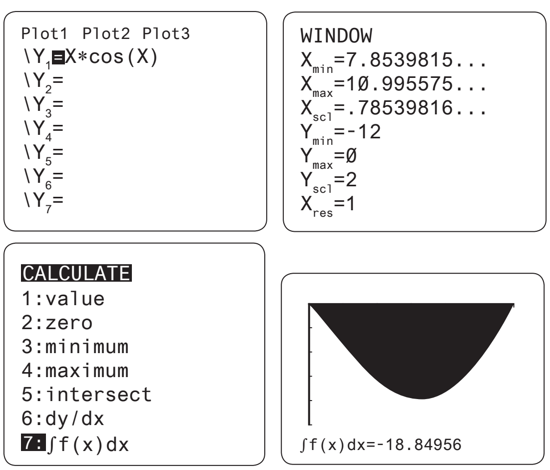
> A3:=plot(x*cos(x),x=5*Pi/2..7*Pi/2,filled=true,color=
turquoise):
> display(c,A3);



$A_3 = 6\pi \text{ u}^2$

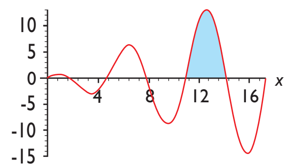
Vérification du calcul de A_3

Calcul de A_3



d'où $A_3 = 6\pi \text{ u}^2$

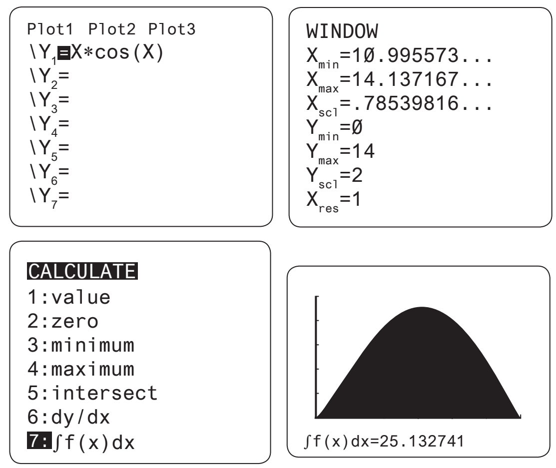
> A4:=plot(x*cos(x),x=7*Pi/2..9*Pi/2,filled=true,color=
turquoise):
> display(c,A4);



$A_4 = 8\pi \text{ u}^2$

Vérification du calcul de A_4

Calcul de A_4



d'où $A_4 = 8\pi \text{ u}^2$

c) $$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{25} \\ &= 2\pi + 4\pi + 6\pi + \ldots + 50\pi \\ &= 2\pi(1 + 2 + 3 + \ldots + 25) \\ &= 2\pi\left(\frac{25(26)}{2}\right) \\ &= 650\pi \text{ u}^2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} A_t &= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n \\ &= 2\pi + 4\pi + 6\pi + \ldots + 2n\pi \\ &= 2\pi(1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 2\pi\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= n(n+1)\pi \text{ u}^2 \end{aligned}$$

27. a) Nous savons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

① $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

ainsi, en remplaçant x par $(-x)$, nous obtenons

② $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \ldots\right] \quad (① - ②)$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cette série converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \ldots\right] \quad (① + ②)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Cette série converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $i = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 i = -i$
$i^4 = i^2 i^2 = 1$
$i^5 = i^3 i^2 = (-i)(-1) = i$
$i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$
$i^7 = i^5 i^2 = i(-1) = -i$
$i^8 = i^6 i^2 = 1$
$i^9 = i$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

Ainsi, en remplaçant x par (ix), nous obtenons

$$\sin(ix) = ix - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^9}{9!} - \ldots$$
$$= ix - \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^5x^5}{5!} - \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^9x^9}{9!} - \ldots$$
$$= ix + \frac{x^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{ix^7}{7!} + \frac{ix^9}{9!} - \ldots$$
$$= i\left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\right]$$
$$= i \sinh x \qquad \text{(voir a))}$$

c) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

Ainsi, en remplaçant x par (ix), nous obtenons

$$\cos(ix) = 1 - \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^8}{8!} - \ldots$$
$$= 1 - \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} - \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^8x^8}{8!} - \ldots$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$
$$= \cosh x \qquad \text{(voir a))}$$

28. a) Nous savons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Ainsi, en remplaçant x par (ix), nous obtenons

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{n!} + \ldots$$
$$= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \ldots + \frac{i^nx^n}{n!} + \ldots$$
$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
$$(i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ \ldots)$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + \left(ix - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots\right)$$
$$= \cos x + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

b) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i(0)$
d'où $e^{i\pi} = -1$

29. Supposons que $f(x)$ possède deux développements :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad ①$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n + \ldots \qquad ②$$

Démontrons que ces développements sont identiques.
En posant $x = 0$ dans ① et ②, nous obtenons

$a_0 = f(0)$ et $b_0 = f(0)$, d'où $a_0 = b_0$.

Calculons la dérivée de chaque série de puissance :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \qquad ③$$

et

$$f'(x) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \ldots + nb_nx^{n-1} + \ldots \qquad ④$$

En posant $x = 0$ dans ③ et ④, nous obtenons

$a_1 = f'(0)$ et $b_1 = f'(0)$, d'où $a_1 = b_1$.

Calculons la dérivée seconde de chaque série :

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots \qquad ⑤$$

et

$$f''(x) = 2b_2 + 6b_3x + \ldots + n(n-1)b_nx^{n-2} + \ldots \qquad ⑥$$

En posant $x = 0$ dans ⑤ et ⑥, nous obtenons

$2a_2 = f''(0)$ et $2b_2 = f''(0)$, d'où $a_2 = b_2$.

De façon analogue, $a_n = b_n$ pour $n = 3, 4, \ldots$
donc les développements sont identiques,
d'où le développement en série entière est unique.

6

30. a) Énumérons d'abord divers termes de la suite, en les évaluant.

$$a_1 = 1 - \ln 1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln 2 = 0{,}806\,8\ldots$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln 3 = 0{,}734\,7\ldots$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ln 4 = 0{,}697\,0\ldots$$

Démontrons que la suite $\{a_n\}$ est
1) décroissante et
2) bornée inférieurement.

1) $\{a_n\}$ est décroissante.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

Il faut démontrer que

$$a_n > a_{n+1}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$-\ln n > \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$\left[\ln(n+1) - \ln n\right] > \frac{1}{n+1}$$

Or le membre de gauche est égal à $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$.
Ainsi il faut démontrer que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt > \frac{1}{n+1}$$

Or le membre de gauche correspond à l'aire comprise entre la courbe $\frac{1}{t}$ et l'axe des x sur $[n, n+1]$, et le membre de droite correspond à l'aire du rectangle de hauteur $\frac{1}{n+1}$ sur $[n, n+1]$, qui est inférieure à l'aire précédente, donc $a_n > a_{n+1}$, d'où $\{a_n\}$ est décroissante.

2) $\{a_n\}$ est bornée inférieurement.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \int_1^n \frac{1}{t}\,dt$$

Or $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ correspond à la somme des aires des rectangles circonscrits et $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,dt$ correspond à l'aire entre la courbe $\frac{1}{t}$ et l'axe des x sur $[1, n]$, donc $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) > \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,dt$, d'où $\{a_n\}$ est bornée inférieurement.

Par le théorème 6.5, la suite $\{a_n\}$ est convergente.

b)
```
an:=Sum(1/k,k=1..n)-ln(n)=evalf(limit(sum(1/k,k=1..n)
-ln(n),n=infinity));
```

$$an := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) = 0{,}5772156649$$

6