# Solutionnaire
# Exercices récapitulatifs

## Chapitre 2 (page 120)



**1.** a) Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 100$ et $dx = -1$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$, ainsi $dy = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}\,dx$

En remplaçant $x$ par 100 et $dx$ par -1, nous obtenons

$$dy = \frac{-1}{2\sqrt{100^3}}(-1) = \frac{1}{2(1000)} = 0{,}0005$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{99}} &= \frac{1}{\sqrt{100}} + \Delta y\\ &\approx \frac{1}{10} + dy\\ &\approx 0{,}1 + 0{,}0005\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{1}{\sqrt{99}} \approx 0{,}1005$

b) Calculons d'abord $\sqrt{26}$.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$ et $dx = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, ainsi $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

En remplaçant $x$ par 25 et $dx$ par 1, nous obtenons

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}(1) = \frac{1}{2(5)} = 0{,}1$$

$$\begin{aligned}\sqrt{26} &= \sqrt{25} + \Delta y\\ &\approx 5 + dy\\ &\approx 5 + 0{,}1\\ &\approx 5{,}1\end{aligned}$$

Calculons ensuite $\sqrt[3]{26}$.

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$ et $dx = -1$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, ainsi $dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

En remplaçant $x$ par 27 et $dx$ par -1, nous obtenons

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(27)^2}}(-1) = \frac{-1}{3\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{-1}{3(3)^2} = \frac{-1}{27}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{26} &= \sqrt[3]{27} + \Delta y\\ &\approx 3 + dy\\ &\approx 3 - \frac{1}{27}\\ &\approx \frac{80}{27}\\ &\approx 2{,}963\end{aligned}$$

Nous avons donc $\sqrt{26} + \sqrt[3]{26} \approx 5{,}1 + 2{,}963$

d'où $\sqrt{26} + \sqrt[3]{26} \approx 8{,}063$

**2.** Soit $x$, la longueur de l'arête.

a) $V = x^3$, ainsi $dV = 3x^2\,dx$

En remplaçant $x$ par 8 et $dx$ par 0,01

$dV = 3(8)^2(0{,}01) = 1{,}92$

d'où $dV = 1{,}92$ cm$^3$

$\Delta V = (8{,}01)^3 - 8^3 = 1{,}922\,401$

d'où $\Delta V = 1{,}922\,401$ cm$^3$

b) $A = 6x^2$, ainsi $dA = 12x\,dx$

En remplaçant $x$ par 8 et $dx$ par 0,01, nous obtenons

$dA = 12(8)(0{,}01) = 0{,}96$

d'où $dA = 0{,}96$ cm$^2$

$\Delta A = 6(8{,}01)^2 - 6(8)^2 = 0{,}9606$

d'où $\Delta A = 0{,}9606$ cm$^2$

**3.** a) $A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r\,h$

$$A(h) = 2\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2\pi\left(\frac{h}{2}\right)h \qquad \left(h = 2r,\ \text{ainsi } r = \frac{h}{2}\right)$$

$$A(h) = \frac{3\pi h^2}{2}$$

$$\begin{aligned}E_a &\approx |dA|\\ &\approx |3\pi h\,dh|\\ &\approx |3\pi(14{,}3)(\pm 0{,}02)| \qquad (h = 14{,}3 \text{ et } dh = \pm 0{,}02)\\ &\approx 0{,}858\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

d'où $E_a \approx 2{,}695$ cm$^2$

b)
$$\begin{aligned}E_r &= \left|\frac{E_a}{A}\right|\\ &\approx \left|\frac{dA}{A}\right|\\ &\approx \frac{0{,}858\pi}{\dfrac{3\pi(14{,}3)^2}{2}}\\ &\approx 0{,}002\,7972\end{aligned}$$

d'où $E_r \approx 0{,}28\,\%$

c)
$$\begin{aligned}E_r &= \left|\frac{E_a}{A}\right|\\ &\approx \left|\frac{dA}{A}\right| \approx \frac{|3\pi h\,dh|}{\dfrac{3\pi h^2}{2}}\end{aligned}$$

d'où $E_r \approx \dfrac{2|dh|}{h}$

**4.** a) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{x^2}+\frac{x^2}{5}-3x^5\right)dx = 5\int x^{-2}\,dx+\frac{1}{5}\int x^2\,dx-3\int x^5\,dx$

$\displaystyle = 5\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{5}\frac{x^3}{3}-3\frac{x^6}{6}+C$

$\displaystyle = \frac{-5}{x}+\frac{x^3}{15}-\frac{x^6}{2}+C$

b) $\displaystyle\int\left(\sqrt[5]{x^3}+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{7}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$

$\displaystyle = \int x^{\frac{3}{5}}\,dx+4\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx-7\int x^{\frac{-5}{3}}\,dx$

$\displaystyle = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-7\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{-2}{3}}+C$

$\displaystyle = \frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8}+8\sqrt{x}+\frac{21}{2\sqrt[3]{x^2}}+C$

c) $\displaystyle\int\left(3\cos x-\frac{\sin x}{5}\right)dx = 3\int\cos x\,dx-\frac{1}{5}\int\sin x\,dx$

$\displaystyle = 3\sin x+\frac{\cos x}{5}+C$

d) $\displaystyle\int\left(7x+\frac{x^7}{7}-7^x+\frac{7}{x}-7^7\right)dx$

$\displaystyle = 7\int x\,dx+\frac{1}{7}\int x^7\,dx-\int 7^x\,dx+7\int\frac{1}{x}\,dx-7^7\int dx$

$\displaystyle = \frac{7x^2}{2}+\frac{1}{7}\frac{x^8}{8}-\frac{7^x}{\ln 7}+7\ln|x|-7^7x+C$

$\displaystyle = \frac{7x^2}{2}+\frac{x^8}{56}-\frac{7^x}{\ln 7}+7\ln|x|-7^7x+C$

e) $\displaystyle\int\left(\frac{8}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{4}{1+t^2}+\frac{7}{3t\sqrt{t^2-1}}\right)dt$

$\displaystyle = 8\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt-4\int\frac{1}{1+t^2}\,dt+\frac{7}{3}\int\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$

$\displaystyle = 8\text{ Arc sin }t-4\text{ Arc tan }t+\frac{7}{3}\text{Arc sec }t+C$

f) $\displaystyle\int\sec\theta\left(2\sec\theta-\frac{\tan\theta}{2}\right)d\theta$

$\displaystyle = 2\int\sec^2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$\displaystyle = 2\tan\theta-\frac{\sec\theta}{2}+C$

g) $\displaystyle\int(x-1)^3x^2\,dx = \int(x^3-3x^2+3x-1)x^2\,dx$

$\displaystyle = \int x^5\,dx-3\int x^4\,dx+3\int x^3\,dx-\int x^2\,dx$

$\displaystyle = \frac{x^6}{6}-\frac{3x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+C$

h) En effectuant $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}$, nous obtenons

$\displaystyle\frac{x^2-x-6}{x^2+2x} = 1+\frac{-3x-6}{x^2+2x}$

$\displaystyle = 1+\frac{-3(x+2)}{x(x+2)}$

$\displaystyle = 1-\frac{3}{x}$

Ainsi $\displaystyle\int\frac{x^2-x-6}{x^2+2x}\,dx = \int\left(1-\frac{3}{x}\right)dx$

$\displaystyle = \int 1\,dx-3\int\frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle = x-3\ln|x|+C$

i) $\displaystyle\int\left(\frac{7}{3u}-\frac{4}{5u^2}-\frac{2}{7\sqrt{1-u^2}}\right)du$

$\displaystyle = \frac{7}{3}\int\frac{1}{u}\,du-\frac{4}{5}\int u^{-2}du-\frac{2}{7}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$\displaystyle = \frac{7}{3}\ln|u|+\frac{4}{5u}-\frac{2\text{ Arc sin }u}{7}+C$

j) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{5t^2+5}-10^t\right)dt = \frac{3}{5}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt-\int 10^t\,dt$

$\displaystyle = \frac{3\text{Arc tan }t}{5}-\frac{10^t}{\ln 10}+C$

k) $\displaystyle\int(3x-5)\left(\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)dx$

$\displaystyle = \int\left[3x\left(\frac{2}{x}\right)+3x\sqrt{x}-5\left(\frac{2}{x}\right)-5\sqrt{x}\right]dx$

$\displaystyle = \int 6\,dx+3\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-10\int\frac{1}{x}\,dx-5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\displaystyle = 6x+\frac{6\sqrt{x^5}}{5}-10\ln|x|-\frac{10\sqrt{x^3}}{3}+C$

l) $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2du = \int\left(1-\frac{2}{\sqrt{u}}+\frac{1}{u}\right)du$

$\displaystyle = \int 1\,du-2\int u^{\frac{-1}{2}}\,du+\int\frac{1}{u}\,du$

$\displaystyle = u-4\sqrt{u}+\ln|u|+C$

m) $\displaystyle\int\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+3\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{\frac{-1}{6}}\,dx-3\int x^{\frac{-5}{6}}\,dx+3\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}-3\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}}+3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$

$\displaystyle = \frac{2\sqrt[6]{x^5}}{5}-18\sqrt[6]{x}+6\sqrt{x}+C$

n) En effectuant $\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$, nous obtenons

$\displaystyle\frac{x^2-4}{x^2+1} = 1-\frac{5}{x^2+1}$

Ainsi $\displaystyle\int\frac{x^2-4}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{5}{x^2+1}\right)dx$

$\displaystyle = \int 1\,dx-5\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$\displaystyle = x-5\text{ Arc tan }x+C$

o) $\displaystyle\int(\tan\theta+\cot\theta)^2d\theta = \int(\tan^2\theta+2+\cot^2\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = \int(\sec^2\theta-1+2+\csc^2\theta-1)\,d\theta$

$\displaystyle = \int(\sec^2\theta+\csc^2\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = \int\sec^2\theta\,d\theta+\int\csc^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle = \tan\theta-\cot\theta+C$

p) $\displaystyle\int\sin t\left(3t\csc t-\frac{\cot t}{3}+5\right)dt$

$\displaystyle = 3\int\sin t\left(t\frac{1}{\sin t}\right)dt-\frac{1}{3}\int\sin t\frac{\cos t}{\sin t}\,dt+5\int\sin t\,dt$

$\displaystyle = 3\int t\,dt-\frac{1}{3}\int\cos t\;dt+5\int\sin t\;dt$

$\displaystyle = \frac{3t^2}{2}-\frac{\sin t}{3}-5\cos t+C$

**5.** a) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sin x| + C \end{aligned}$$

b) $\int \csc x\,dx = \int \frac{\csc x(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \csc x + \cot x \\ du &= (-\csc x \cot x - \csc^2 x)\,dx \\ -du &= \csc x(\csc x + \cot x)\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\csc x(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)}\,dx &= \int \frac{-1}{u}\,du \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\csc x + \cot x| + C \end{aligned}$$

**6.** a) $\int 2x^2(5 - x^3)^8\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 5 - x^3 \\ du &= -3x^2\,dx \\ \frac{-1}{3}du &= x^2\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int 2x^2(5 - x^3)^8\,dx &= \frac{-2}{3}\int u^8\,du \\ &= \frac{-2}{3}\,\frac{u^9}{9} + C \\ &= \frac{-2}{27}(5 - x^3)^9 + C \end{aligned}$$

b) $\int \sin^3 2\theta \cos 2\theta\,d\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin 2\theta \\ du &= 2\cos 2\theta\,d\theta \\ \frac{1}{2}du &= \cos 2\theta\,d\theta \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 2\theta \cos 2\theta\,d\theta &= \frac{1}{2}\int u^3\,du \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{u^4}{4} + C \\ &= \frac{1}{8}\sin^4 2\theta + C \end{aligned}$$

c) $\int 3x \sin x^2\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x\,dx \\ \frac{1}{2}du &= x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int 3x \sin x^2\,dx &= \frac{3}{2}\int \sin u\,du \\ &= \frac{3}{2}(-\cos u) + C \\ &= \frac{-3}{2}\cos x^2 + C \end{aligned}$$

d) $\int \frac{4u}{u^2 + 1}\,du$

$$\boxed{\begin{aligned} h &= u^2 + 1 \\ dh &= 2u\,du \\ \frac{1}{2}dh &= u\,du \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4u}{u^2 + 1}\,du &= \frac{4}{2}\int \frac{1}{h}\,dh \\ &= 2\ln|h| + C \\ &= 2\ln|u^2 + 1| + C \\ &= 2\ln(u^2 + 1) + C \end{aligned}$$

e) $\int (3t^4 + 3)\sec^2(t^5 + 5t - 3)\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= t^5 + 5t - 3 \\ du &= (5t^4 + 5t)\,dt \\ \frac{1}{5}du &= (t^4 + 1)\,dt \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int (3t^4 + 3)\sec^2(t^5 + 5 - 3)\,dt &= \frac{3}{5}\int \sec^2 u\,du \\ &= \frac{3}{5}\tan u + C \\ &= \frac{3}{5}\tan(t^5 + 5t - 3) + C \end{aligned}$$

f) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{1}{x} \\ du &= \frac{-1}{x^2}\,dx \\ -1\,du &= \frac{1}{x^2}\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx &= \frac{-1}{3}\int e^u\,du \\ &= \frac{-1}{3}e^u + C \\ &= \frac{-1}{3}e^{\frac{1}{x}} + C \end{aligned}$$

g) $\int \frac{1}{(1 + x^2)\,\text{Arc}\tan x}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \text{Arc}\tan x \\ du &= \frac{1}{1 + x^2}\,dx \end{aligned}}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\,\text{Arc tan}\,x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\text{Arc tan}\,x| + C$$

h) $\displaystyle\int \frac{\ln(5x)}{2x}\,dx$

$$u = \ln(5x) \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{\ln(5x)}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{u^2}{4} + C = \frac{\ln^2(5x)}{4} + C$$

i) $\int \sec 4\theta \tan 4\theta \, d\theta$

$$u = 4\theta \qquad du = 4\,d\theta \qquad \frac{1}{4}\,du = d\theta$$

$$\int \sec 4\theta \tan 4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int \sec u \tan u\,du = \frac{1}{4}\sec u + C = \frac{1}{4}\sec 4\theta + C$$

j) $\displaystyle\int \sec^4\left(\frac{t}{3}\right)\tan\left(\frac{t}{3}\right)dt = \int \sec^3\left(\frac{t}{3}\right)\sec\left(\frac{t}{3}\right)\tan\left(\frac{t}{3}\right)dt$

$$u = \sec\left(\frac{t}{3}\right) \qquad du = \frac{1}{3}\sec\left(\frac{t}{3}\right)\tan\left(\frac{t}{3}\right)dt \qquad 3\,du = \sec\left(\frac{t}{3}\right)\tan\left(\frac{t}{3}\right)dt$$

$$\int \sec^3\left(\frac{t}{3}\right)\sec\left(\frac{t}{3}\right)\tan\left(\frac{t}{3}\right)dt = 3\int u^3\,du = \frac{3}{4}u^4 + C = \frac{3}{4}\sec^4\left(\frac{t}{3}\right) + C$$

k) $\displaystyle\int \frac{e^{\sin 3x}}{\sec 3x}\,dx$

$$u = \sin 3x \qquad du = 3\cos 3x\,dx \qquad \frac{1}{3}\,du = \frac{1}{\sec 3x}\,dx$$

$$\int \frac{e^{\sin 3x}}{\sec 3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{\sin 3x} + C$$

l) $\displaystyle\int \frac{8}{\left(1+\frac{1}{v^2}\right)^3 v^3}\,dv$

$$u = 1 + \frac{1}{v^2} \qquad du = \frac{-2}{v^3}\,dv \qquad \frac{-1}{2}\,du = \frac{1}{v^3}\,dv$$

$$\int \frac{8}{\left(1+\frac{1}{v^2}\right)^3 v^3}\,dv = \frac{-8}{2}\int u^{-3}\,du = -4\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{v^2}\right)^2} + C$$

m) $\int \csc^2 4\theta \cot^2 4\theta\,d\theta$

$$u = \cot 4\theta \qquad du = -4\csc^2 4\theta\,d\theta \qquad \frac{-1}{4}\,du = \csc^2 4\theta\,d\theta$$

$$\int \csc^2 4\theta \cot^2 4\theta\,d\theta = \frac{-1}{4}\int u^2\,du = \frac{-1}{4}\,\frac{u^3}{3} + C = \frac{-\cot^3 4\theta}{12} + C$$

n) $\displaystyle\int \frac{e^x + \sin x}{\sqrt{e^x - \cos x}}\,dx$

$$u = e^x - \cos x \qquad du = (e^x + \sin x)\,dx$$

$$\int \frac{e^x + \sin x}{\sqrt{e^x - \cos x}}\,dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{e^x - \cos x} + C$$

o) $\displaystyle\int \frac{2^{\text{Arc sec}\,t}}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$

$$u = \text{Arc sec}\,t \qquad du = \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

2

2

$$\int \frac{2^{\text{Arc sec}\,t}}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int 2^u\,du = \frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{2^{\text{Arc sec}\,t}}{\ln 2} + C$$

p) $\int (ax+b)^r\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= ax+b \\ du &= a\,dx \\ \frac{1}{a}du &= dx \end{aligned}}$$

Si $r \neq -1$

$$\int (ax+b)^r\,dx = \frac{1}{a}\int u^r\,du = \frac{1}{a}\frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{(r+1)} + C$$

Si $r = -1$ $\quad \int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

**7.** a) $I = \int \left(e^{\frac{-x}{3}} + 3^{6x}\right)dx = \int e^{\frac{-x}{3}}\,dx + \int 3^{6x}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{-x}{3} \\ du &= \frac{-1}{3}dx \\ -3\,du &= dx \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v &= 6x \\ dv &= 6\,dx \\ \frac{1}{6}dv &= dx \end{aligned}}$$

$$I = -3\int e^u\,du + \frac{1}{6}\int 3^v\,dv = -3e^u + \frac{1}{6}\frac{1}{\ln 3}3^v + C = -3e^{\frac{-x}{3}} + \frac{1}{6\ln 3}3^{6x} + C$$

b) $I = \int \left(\sin\left(\frac{\theta}{5}\right) - \cos 4\theta\right)d\theta = \int \sin\left(\frac{\theta}{5}\right)d\theta - \int \cos 4\theta\,d\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{\theta}{5} \\ du &= \frac{1}{5}d\theta \\ 5\,du &= d\theta \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v &= 4\theta \\ dv &= 4\,d\theta \\ \frac{1}{4}dv &= d\theta \end{aligned}}$$

$$I = 5\int \sin u\,du - \frac{1}{4}\int \cos v\,dv = -5\cos u - \frac{1}{4}\sin v + C = -5\cos\left(\frac{\theta}{5}\right) - \frac{1}{4}\sin 4\theta + C$$

c) $I = \int \sqrt{8-t}\,dt + 3\int \frac{t}{\sqrt{9+t^2}} - 9\int \frac{1}{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)^5}\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 8-t \\ du &= -1\,dt \\ -1\,du &= dt \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v &= 9+t^2 \\ dv &= 2t\,dt \\ \frac{1}{2}dv &= t\,dt \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} w &= 1+\sqrt{t} \\ dw &= \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}dt \\ 2\,dw &= \frac{1}{\sqrt{t}}dt \end{aligned}}$$

$$I = -\int u^{\frac{1}{2}}\,du + \frac{3}{2}\int v^{\frac{-1}{2}}\,dv - 9(2)\int w^{-5}\,dw = \frac{-u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} - 18\frac{w^{-4}}{-4} + C = \frac{-2}{3}\sqrt{(8-t)^3} + 3\sqrt{9+t^2} + \frac{9}{2\left(1+\sqrt{t}\right)^4} + C$$

d) $I = \int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx - \int x^3\csc^2 x^4\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ 2\,du &= \frac{1}{\sqrt{x}}dx \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v &= x^4 \\ dv &= 4x^3\,dx \\ \frac{1}{4}dv &= x^3\,dx \end{aligned}}$$

$$I = 2\int \sec^2 u\,du - \frac{1}{4}\int \csc^2 v\,dv = 2\tan u - \frac{1}{4}(-\cot v) + C = 2\tan\sqrt{x} + \frac{\cot x^4}{4} + C$$

e) $I = \int \frac{1}{(3h+1)^2}\,dh - 6\int \frac{1}{5h+6}\,dh$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 3h+1 \\ du &= 3\,dh \\ \frac{1}{3}du &= dh \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v &= 5h+6 \\ dv &= 5\,dh \\ \frac{1}{5}dv &= dh \end{aligned}}$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du - \frac{6}{5}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{-1}{3u} - \frac{6}{5}\ln|v| + C = \frac{-1}{3(3h+1)} - \frac{6\ln|5h+6|}{5} + C$$

f) $I = 4\int \frac{\log x}{x}\,dx - 5\int e^{-x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \log x \\ du &= \frac{1}{x\ln 10}dx \\ \ln 10\,du &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v &= -x \\ dv &= -dx \\ -dv &= dx \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} w &= \ln x \\ dw &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}}$$

$$I = 4\ln 10 \int u\,du + 5\int e^v\,dv + \frac{1}{3}\int \frac{1}{w}\,dw$$
$$= 4\ln 10\,\frac{u^2}{2} + 5e^v + \frac{1}{3}\ln|w| + C$$
$$= 2\ln 10\,(\log x)^2 + \frac{5}{e^x} + \frac{\ln|\ln x|}{3} + C$$

g) $I = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx - \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

$u = 1 + e^{2x}$, $du = 2e^{2x}\,dx$, $\frac{1}{2}du = e^{2x}\,dx$

$v = e^x$, $dv = e^x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{1+v^2}\,dv$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u| - \text{Arc tan}\, v + C$$
$$= \frac{\ln(1+e^{2x})}{2} - \text{Arc tan}\,(e^x) + C$$

h) $I = \int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx - \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

$u = \ln\sqrt{x}$, $du = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$, $2\,du = \frac{1}{x}\,dx$

$v = \ln x$, $dv = \frac{1}{x}\,dx$

$$I = 2\int u\,du - \int v^{\frac{1}{2}}\,dv$$
$$= 2\frac{u^2}{2} - \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= (\ln\sqrt{x})^2 - \frac{2\sqrt{(\ln x)^3}}{3} + C$$

i) $I = \int e^{\sin t}\cos t\,dt - \int e^{-\cos t}\sin t\,dt$

$u = \sin t$, $du = \cos t\,dt$

$v = -\cos t$, $dv = \sin t\,dt$

$$I = \int e^u\,du - \int e^v\,dv$$
$$= e^u - e^v + C$$
$$= e^{\sin t} - e^{-\cos t} + C$$

j) $I = \int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx + \int \frac{\ln(\sin x)}{\tan x}\,dx$

$u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}\,dx$

$v = \ln(\sin x)$, $dv = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$, $dv = \frac{1}{\tan x}\,dx$

$$I = \int \sin u\,du + \int v\,dv$$
$$= -\cos u + \frac{v^2}{2} + C$$
$$= -\cos(\ln x) + \frac{(\ln(\sin x))^2}{2} + C$$

k) $I = \int \frac{\tan(\ln h)}{h}\,dh - \int e^h\cot(e^h)\,dh$

$u = \ln h$, $du = \frac{1}{h}\,dh$

$v = e^h$, $dv = e^h\,dh$

$$I = \int \tan u\,du - \int \cot v\,dv$$
$$= -\ln|\cos u| - \ln|\sin v| + C$$
$$= -\ln|\cos(\ln h)| - \ln|\sin(e^h)| + C$$

l) $I = \int \frac{\sec\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx + \int \frac{\csc\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \frac{1}{x}$, $du = \frac{-1}{x^2}\,dx$, $-du = \frac{1}{x^2}\,dx$

$v = \sqrt{x}$, $dv = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, $2\,dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$I = -\int \sec u\,du + 2\int \csc v\,dv$$
$$= -\ln|\sec u + \tan u| - 2\ln|\csc v + \cot v| + C$$
$$= -\ln\left|\sec\left(\frac{1}{x}\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right| - 2\ln\left|\csc\sqrt{x} + \cot\sqrt{x}\right| + C$$

**8.** a) $I = \int \frac{x}{\cos(3x^2+4)}\,dx = \int x\sec(3x^2+4)\,dx$

$u = 3x^2 + 4$, $du = 6x\,dx$, $\frac{1}{6}du = x\,dx$

$$I = \frac{1}{6}\int \sec u\,du$$
$$= \frac{1}{6}\ln|\sec u + \tan u| + C$$
$$= \frac{\ln|\sec(3x^2+4) + \tan(3x^2+4)|}{6} + C$$

b) $I = \int \csc^2\theta\,\csc^2(\cot\theta)\,d\theta$

$u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta\,d\theta$, $-du = \csc^2\theta\,d\theta$

$$I = -\int \csc^2 u\,du$$
$$= -(-\cot u) + C$$
$$= \cot(\cot\theta) + C$$

2

2

c) $I = \int 3x \tan(3x^2)\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 3x^2 \\ du &= 6x\,dx \\ \frac{1}{6}du &= x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{6}\int \tan u\,du \\ &= \frac{1}{2}(\text{-}\ln|\cos u|) + C \\ &= \frac{\text{-}\ln|\cos 3x^2|}{2} + C \end{aligned}$$

d) $I = \int \tan^2(5t+1)\,dt = \int \left(\sec^2(5t+1) - 1\right)dt$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 5t+1 \\ du &= 5\,dt \\ \frac{1}{5}du &= dt \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^2(5t+1)\,dt - \int 1\,dt \\ &= \frac{1}{5}\int \sec^2 u\,dt - t + C_1 \\ &= \frac{1}{5}\tan u - t + C \\ &= \frac{\tan(5t+1)}{5} - t + C \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} I &= \int (\sec^2 5\theta + 6\sec 5\theta \tan 5\theta + 9\tan^2 5\theta)\,d\theta \\ &= \int (\sec^2 5\theta + 6\sec 5\theta \tan 5\theta + 9(\sec^2 5\theta - 1))\,d\theta \\ &= \int (10\sec^2 5\theta + 6\sec 5\theta \tan 5\theta - 9)\,d\theta \\ &= \int (10\sec^2 5\theta + 6\sec 5\theta \tan 5\theta)\,d\theta - \int 9\,d\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 5\theta \\ du &= 5\,d\theta \\ \frac{1}{5}du &= d\theta \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5}\int (10\sec^2 u + 6\sec u \tan u)\,du - 9\int d\theta \\ &= \frac{1}{5}(10\tan u + 6\sec u) + C_1 - 9\theta + C_2 \\ &= 2\tan 5\theta + \frac{6\sec 5\theta}{5} - 9\theta + C \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\right)dx \\ &= \int \frac{1(\sin x)}{\cos x \cos x}\,dx - \int \frac{1}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos x}\,dx \\ &= \int \sec x \tan x\,dx - \int \sec x\,dx + \int \cos x\,dx \\ &= \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + \sin x + C \end{aligned}$$

g) Solution 1

$$\begin{aligned} I &= \int \cot^3 \varphi \sec^2 \varphi\,d\varphi \\ &= \int \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi}\frac{1}{\cos^2 \varphi}\,d\varphi \\ &= \int \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi}\,d\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin \varphi \\ du &= \cos \varphi\,d\varphi \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi}\,d\varphi &= \int \frac{1}{u^3}\,du \\ &= \frac{\text{-}1}{2u^2} + C \\ &= \frac{\text{-}1}{2\sin^2 \varphi} + C \end{aligned}$$

Solution 2

$$I = \int \cot^3 \varphi \sec^2 \varphi\,d\varphi = \int \frac{\sec^2 \varphi}{\tan^3 \varphi}\,d\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \tan \varphi \\ du &= \sec^2 \varphi\,d\varphi \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sec^2 \varphi}{\tan^3 \varphi}\,d\varphi &= \int \frac{1}{u^3}\,du \\ &= \frac{\text{-}1}{2u^2} + C_2 \\ &= \frac{\text{-}1}{2\tan^2 \varphi} + C_2 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} &\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}\right)dx \quad \left(\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}(x - \sin x) + C \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} \int (\sin t + \cos t)^2\,dt &= \int (\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t)\,dt \\ &= \int (1 + 2\sin t \cos t)\,dt \\ &= \int 1\,dt + \int 2\sin t \cos t\,dt \\ &= t + C_1 + \int 2\sin t \cos t\,dt \\ &= t + C_1 + 2\int u\,du \\ &= t + C_1 + 2\left(\frac{u^2}{2}\right) + C_2 \\ &= t + \sin^2 t + C \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin t \\ du &= \cos t\,dt \end{aligned}}$$

j) $I = \int \frac{8}{\sin(1-4x)}\,dx = 8\int \csc(1-4x)\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-4x \\ du &= \text{-}4\,dx \\ \frac{\text{-}1}{4}du &= dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= 8\left(\frac{-1}{4}\right)\int \csc u\,du \\ &= -2\left(-\ln|\csc u + \cot u|\right) + C \\ &= 2\ln|\csc(1-4x) + \cot(1-4x)| + C \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos t\sqrt{\sin t}}{\sin t}\,dt \\ &= \int \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}}\,dt \\ &= \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du \\ &= 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{\sin t} + C \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin t \\ du &= \cos t\,dt \end{aligned}}$$

l) $$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan\theta}{1+\sec\theta}\,d\theta \\ &= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)}\,d\theta \\ &= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\,d\theta \\ &= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\,d\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \cos\theta + 1 \\ du &= -\sin\theta\,d\theta \\ -1\,du &= \sin\theta\,d\theta \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{u}\,du \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos\theta + 1| + C \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} I &= \int \sin\varphi\cos\varphi\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi \\ &= \int \sin\varphi\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - (1-\cos^2\varphi)\right)d\varphi \\ &= \int \sin\varphi\cos\varphi\,(2\cos^2\varphi - 1)\,d\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \cos\varphi \\ du &= -\sin\varphi\,d\varphi \\ -du &= \sin\varphi\,d\varphi \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= -\int u(2u^2-1)\,du \\ &= \int u\,du - 2\int u^3\,du \\ &= \frac{u^2}{2} - 2\left(\frac{u^4}{4}\right) + C \\ &= \frac{\cos^2\varphi}{2} - \frac{\cos^4\varphi}{2} + C \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx &= \int \frac{2\sin x\cos x}{\cos x}\,dx \\ &= 2\int \sin x\,dx \\ &= -2\cos x + C \end{aligned}$$

**9.** a) $$I = \int \frac{4}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1+\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x} = u-1 \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow 2\sqrt{x}\,du = dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= 4\int \frac{2\sqrt{x}}{u}\,du \\ &= 8\int \frac{u-1}{u}\,du \\ &= 8\left(\int 1\,du - \int \frac{1}{u}\,du\right) \\ &= 8\left(u - \ln|u|\right) + C_1 \\ &= 8\left(1+\sqrt{x} - \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right) + C_1 \\ &= 8\sqrt{x} - 8\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C \end{aligned}$$

b) $$I = \int (t^2+1)^9\,t\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= t^2+1 \\ du &= 2t\,dt \\ \frac{1}{2}du &= t\,dt \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int u^9\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{10}}{10}\right) + C \\ &= \frac{(t^2+1)^{10}}{20} + C \end{aligned}$$

c) $$I = \int (x^2+1)^9 x^3\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2+1 \Rightarrow \quad x^2 = u-1 \\ du &= 2x\,dx \;\Rightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2+1)^9 x^2\,x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int u^9(u-1)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\int u^{10}\,du - \int u^9\,du\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11} - \frac{u^{10}}{10}\right) + C \\ &= \frac{(x^2+1)^{11}}{22} - \frac{(x^2+1)^{10}}{20} + C \end{aligned}$$

d) $$I = \int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-16}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^3-16 \Rightarrow \quad x^3 = u+16 \\ du &= 3x^2\,dx \;\Rightarrow \frac{1}{3}du = x^2\,dx \end{aligned}}$$

2

2

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^3-16}}\,x^2\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{u+16}{\sqrt{u}}\,du\\ &= \frac{1}{3}\left(\int u^{\frac{1}{2}}\,du + 16\int u^{\frac{-1}{2}}\,du\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 16\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C\\ &= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-16)^2} + \frac{32}{3}\sqrt{x^3-16} + C\end{aligned}$$

e) $I = \int (6x+5)\sqrt{2+3x}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned}u &= 2+3x \Rightarrow \quad x = \frac{u-2}{3}\\ du &= 3\,dx \quad \Rightarrow \frac{1}{3}\,du = dx\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3}\int\left(6\left(\frac{u-2}{3}\right)+5\right)\sqrt{u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\int (2u-4+5)\sqrt{u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\int\left(2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C\\ &= \frac{4\sqrt{(2+3x)^5}}{15} + \frac{2\sqrt{(2+3x)^3}}{9} + C\end{aligned}$$

f) $I = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,e^x\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned}u &= 1+e^x \Rightarrow e^x = u-1\\ du &= e^x\,dx\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{u-1}{u}\,du\\ &= \int 1\,du - \int \frac{1}{u}\,du\\ &= u - \ln|u| + C\\ &= (1+e^x) - \ln|1+e^x| + C\\ &= e^x - \ln(1+e^x) + C\end{aligned}$$

g) $I = \int \frac{4x+\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned}u &= \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \quad x = u^2\\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{4u^2+u}{u^2(u^2+1)}\,2\sqrt{x}\,dx\\ &= 2\int \frac{u(4u+1)}{u^2(u^2+1)}\,u\,du\\ &= 2\int \frac{4u+1}{u^2+1}\,du\\ &= 4\int \frac{2u}{u^2+1}\,du + 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du\\ &= 4\ln|u^2+1| + 2\,\mathrm{Arc\,tan}\,u + C\\ &= 4\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + 2\,\mathrm{Arc\,tan}\,\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}v &= u^2+1\\ dv &= 2u\,du\end{aligned}}$$

h) $I = \int \frac{x^2}{(4+3x)^4}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned}u &= 4+3x \Rightarrow \quad x = \left(\frac{u-4}{3}\right)\\ du &= 3\,dx \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\,du\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3}\int \frac{\left(\frac{u-4}{3}\right)^2}{u^4}\,du\\ &= \frac{1}{27}\int \frac{u^2-8u+16}{u^4}\,du\\ &= \frac{1}{27}\left(\int u^{-2}\,du - 8\int u^{-3}\,du + 16\int u^{-4}\,du\right)\\ &= \frac{1}{27}\left(\frac{u^{-1}}{-1} - 8\,\frac{u^{-2}}{-2} + 16\,\frac{u^{-3}}{-3}\right) + C\\ &= \frac{-1}{27(4+3x)} + \frac{4}{27(4+3x)^2} - \frac{16}{81(4+3x)^3} + C\end{aligned}$$

**10.** a) $I = 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 7\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx - 5\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned}u &= \sqrt{x}\\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\end{aligned}}$$

$$I = \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 14\sqrt{x} - 5\ln|x| + 2e^{\sqrt{x}} + C$$

b) $I = \int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned}u &= t+1\\ du &= dt\end{aligned}}$$

$$I = \int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{(t+1)} + C$$

c) $I = \int e^x \sin^4(e^x)\cos(e^x)\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin(e^x) \\ du &= \cos(e^x)\,e^x\,dx \end{aligned}}$$

$$I = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5(e^x)}{5} + C$$

d) $I = \int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\,dx + \int 2e^{-2x}\,dx + \int 1\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2+e^{2x} \\ du &= 2e^{2x}\,dx \\ \frac{1}{2}\,du &= e^{2x}\,dx \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} v &= -2x \\ dv &= -2\,dx \\ \frac{-1}{2}\,dv &= dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du + 2\left(\frac{-1}{2}\right)\int e^v\,dv + \int 1\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| - e^v + x + C \\ &= \frac{\ln(2+e^{2x})}{2} - e^{-2x} + x + C \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} I &= \int\left(x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{-1}{6}} + \frac{4}{x}\right)dx \\ &= \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{24x^{\frac{5}{6}}}{5} + 4\ln|x| + C \\ &= \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{24\sqrt[6]{x^5}}{5} + 4\ln|x| + C \end{aligned}$$

f) $I = \int\left(2 + \frac{3}{3u+1}\right)du = \int 2\,du + \int \frac{3}{3u+1}\,du$

$$\boxed{\begin{aligned} h &= 3u+1 \\ dh &= 3\,du \\ \frac{1}{3}\,dh &= du \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= 2\int du + 3\left(\frac{1}{3}\right)\int \frac{1}{h}\,dh \\ &= 2u + \ln|h| + C \\ &= 2u + \ln|3u+1| + C \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} I &= \int\left(-x^2 - x - 1 + \frac{1}{1-x}\right)dx \\ &= -\int x^2\,dx - \int x\,dx - \int dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-x \\ du &= -dx \end{aligned}}$$

$$I = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x| + C$$

h) $I = \sqrt{a^2+b^2}\int dt = \sqrt{a^2+b^2}\,t + C$

i) $I = \int \csc^{\frac{1}{2}}(1-x)\csc(1-x)\cot(1-x)\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \csc(1-x) \\ du &= \csc(1-x)\cot(1-x)\,dx \end{aligned}}$$

$$I = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\csc^{\frac{3}{2}}(1-x)}{3} + C$$

j) $I = \int \sec^2\theta\tan^3\theta\,d\theta + \int \sec^2\theta\tan\theta\sec\theta\,d\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \tan\theta \\ du &= \sec^2\theta\,d\theta \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} v &= \sec\theta \\ dv &= \sec\theta\tan\theta\,d\theta \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int u^3\,du + \int v^2\,dv \\ &= \frac{u^4}{4} + \frac{v^3}{3} + C \\ &= \frac{\tan^4\theta}{4} + \frac{\sec^3\theta}{3} + C \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} \int \frac{6}{1+\cos 2x}\,dx &= 6\int \frac{1}{1+\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx \\ &= 6\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx \\ &= 3\int \sec^2 x\,dx \\ &= 3\tan x + C \end{aligned}$$

l) $I = \int \frac{1}{\sqrt{7\left(1-\frac{y^2}{7}\right)}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{7}}\right)^2}}\,dy$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{y}{\sqrt{7}} \\ du &= \frac{1}{\sqrt{7}}\,dy \\ \sqrt{7}\,du &= dy \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{7}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \operatorname{Arc\,sin} u + C \\ &= \operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{y}{\sqrt{7}}\right) + C \end{aligned}$$

m) $I = \int \frac{1}{t\ln t\sqrt{\ln^2 t - 1}}\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \ln t \\ du &= \frac{1}{t}\,dt \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du \\ &= \operatorname{Arc\,sec} u + C \\ &= \operatorname{Arc\,sec}(\ln t) + C \end{aligned}$$

2

n) $I = 8\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 8\int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2x\,dx \\ \frac{-1}{2}du &= x\,dx \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} v &= x^2 \\ dv &= 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dv &= x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= 8\left(\frac{-1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du\right) + 8\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)dv \\ &= -8u^{\frac{1}{2}} + 4\,\text{Arc}\sin v + C \\ &= -8\sqrt{1-x^2} + 4\,\text{Arc}\sin x^2 + C \end{aligned}$$

o) $I = 3\int x^4\,dx + 3\int x^2(x^3+1)^{12}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^3+1 \\ du &= 3x^2\,dx \\ \frac{1}{3}du &= x^2\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= 3\int x^4\,dx + 3\left(\frac{1}{3}\right)\int u^{12}\,du \\ &= 3\frac{x^5}{5} + \frac{u^{13}}{13} + C \\ &= \frac{3x^5}{5} + \frac{(x^3+1)^{13}}{13} + C \end{aligned}$$

p) $I = \int \frac{e^x}{9\left(\frac{4e^{2x}}{9}+1\right)}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{e^x}{\left(\frac{2e^x}{3}\right)^2+1}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{2}{3}e^x \\ du &= \frac{2}{3}e^x\,dx \\ \frac{3}{2}du &= e^x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{6}\text{Arc}\tan u + C \\ &= \frac{1}{6}\text{Arc}\tan\left(\frac{2e^x}{3}\right) + C \end{aligned}$$

q) $I = \int x^2 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-x^2 \Rightarrow \quad x^2 = 1-u \\ du &= -2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{-1}{2}du \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-1}{2}\int (1-u)u^{\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{-1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du + \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}\,du \\ &= \frac{-1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{-\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} + C \end{aligned}$$

r) $I = \int \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}(e^{2t}-1)}}\,dt = \int \frac{e^t}{e^t\sqrt{(e^t)^2-1}}\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^t \\ du &= e^t\,dt \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du \\ &= \text{Arc}\sec u + C \\ &= \text{Arc}\sec(e^t) + C \end{aligned}$$

s) $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2x\,dx \\ \frac{-1}{2}du &= x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du + 2\,\text{Arc}\sin x + C_1 \\ &= -\sqrt{1-x^2} + 2\,\text{Arc}\sin x + C \end{aligned}$$

t) $I = \int \frac{1}{e^{-u}((e^u)^2+1)}\,du = \int \frac{e^u}{(e^u)^2+1}\,du$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= e^u \\ dv &= e^u\,du \end{aligned}}$$

$$I = \int \frac{1}{v^2+1}\,dv = \text{Arc}\tan(v) + C = \text{Arc}\tan(e^u) + C$$

u) $I = \int \frac{\sec^2\theta\,\tan\theta}{1-\tan\theta}\,d\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-\tan\theta \quad \Rightarrow \qquad \tan\theta = 1-u \\ du &= -\sec^2\theta\,d\theta \Rightarrow \sec^2\theta\,d\theta = -du \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-u}{u}(-du) = -\int \frac{1}{u}\,du + \int 1\,du \\ &= -\ln|u| + u + C \\ &= -\ln|1-\tan\theta| + (1-\tan\theta) + C \\ &= -\ln|1-\tan\theta| - \tan\theta + C \end{aligned}$$

v) $I = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int \frac{\ln 7 - 5\ln x}{x}\,dx$

$= \dfrac{3}{2}\ln 7 \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{15}{2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}}$$

$I = \dfrac{3\ln 7}{2}\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{15}{2}\int u\,du$

$= \dfrac{3\ln 7 \ln|x|}{2} - \dfrac{15}{2}\dfrac{u^2}{2} + C$

$= \dfrac{3\ln 7 \ln|x|}{2} - \dfrac{15(\ln x)^2}{4} + C$

w) $I = \displaystyle\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}\,dx$

$= \displaystyle\int \frac{(x^2 + 1) + 4x + 3}{x^2 + 1}\,dx$

$= \displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}\,dx + 4\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2 + 1 \\ du &= 2x\,dx \\ \frac{1}{2}du &= x\,dx \end{aligned}}$$

$I = \displaystyle\int 1\,dx + 4\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{u}\,du + 3\int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$

$= x + 2\ln|u| + 3 \text{ Arc}\tan x + C$

$= x + 2\ln(x^2 + 1) + 3 \text{ Arc}\tan x + C$

x) $I = \displaystyle\int \frac{y}{y^2\sqrt{1 - \ln^2 y}}\,dy = \int \frac{1}{y\sqrt{1 - (\ln y)^2}}\,dy$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \ln y \\ du &= \frac{1}{y}\,dy \end{aligned}}$$

$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du = \text{Arc}\sin u = \text{Arc}\sin(\ln y) + C$

y) $I = 3\displaystyle\int (3x^2 - 2x)e^{(x^3 - x^2)}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^3 - x^2 \\ du &= (3x^2 - 2x)\,dx \end{aligned}}$$

$I = 3\displaystyle\int e^u\,du = 3e^u + C = 3e^{(x^3 - x^2)} + C$

z) $I = \displaystyle\int e^{\sin 2\theta \cos 2\theta}(\sin^2 2\theta - \cos^2 2\theta)\,d\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin 2\theta \cos 2\theta \\ du &= 2(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta)\,d\theta \\ \frac{-1}{2}du &= (\sin^2 2\theta - \cos^2 2\theta)\,d\theta \end{aligned}}$$

$I = \dfrac{-1}{2}\displaystyle\int e^u\,du = \frac{-1}{2}e^u + C = \frac{-e^{\sin 2\theta \cos 2\theta}}{2} + C$

**11.** a) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x}\sqrt{y},\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{x}\,dx$

$\displaystyle\int y^{\frac{-1}{2}}\,dy = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

Implicite : $2\sqrt{y} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Explicite : $y = \left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C_1\right)^2$, où $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C_1\right) > 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2}e^y,\ \dfrac{1}{e^y}\,dy = xe^{x^2}\,dx$

$\displaystyle\int e^{-y}\,dy = \int xe^{x^2}\,dx$

Implicite : $-e^{-y} = \dfrac{e^{x^2}}{2} + C$

$e^{-y} = C_1 - \dfrac{e^{x^2}}{2}$, où $C_1 = -C$

$-y = \ln\left(C_1 - \dfrac{e^{x^2}}{2}\right)$, où $\left(C_1 - \dfrac{e^{x^2}}{2}\right) > 0$

Explicite : $y = -\ln\left(C_1 - \dfrac{e^{x^2}}{2}\right)$, où $\left(C_1 - \dfrac{e^{x^2}}{2}\right) > 0$

c) $\left(\dfrac{4 + y\cos y}{y}\right)dy = (\sec^2 x - 3x^3)\,dx$

$4\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy + \int \cos y\,dy = \int \sec^2 x\,dx - 3\int x^3\,dx$

Implicite : $4\ln|y| + \sin y = \tan x - \dfrac{3x^4}{4} + C$

Explicite : aucune

d) $\dfrac{dy}{dx} = yx + \dfrac{y}{x^2},\ dy = y\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$

Implicite : $\ln|y| = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} + C$

$y = e^{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C\right)} = e^{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)}e^C$

Explicite : $y = C_1 e^{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)}$, où $C_1 = e^C$

e) $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy - 2x = 0$

$(1 + x^2)\,dy = (2x - xy)\,dx$

$(1 + x^2)\,dy = x(2 - y)\,dx$

$\dfrac{1}{2 - y}\,dy = \dfrac{x}{1 + x^2}\,dx$

2

Implicite : $-\ln|2-y| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$

$\ln|2-y| = \frac{-1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C_1$, où $C_1 = e^{-C}$

$\ln|2-y| = \ln\frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}}$

$|2-y| = \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}}$

Explicite : $y = \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} + 2$, où $C_1 > 0$

f) $x\cos y\,dy = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\tan y}dx$

$\cos y\left(1+\frac{\sin y}{\cos y}\right)dy = \frac{1+\sqrt{x}}{x}dx$

$\int\cos y\,dy + \int\sin y\,dy = \int\frac{1}{x}dx + \int x^{\frac{-1}{2}}dx$

Implicite : $\sin y - \cos y = \ln|x| + 2\sqrt{x} + C$

Explicite : aucune

**12.** a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$y\,dy = x\,dx$

$\int y\,dy = \int x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

En remplaçant $x$ par 4 et $y$ par -3, nous obtenons

$\frac{9}{2} = \frac{16}{2} + C$

$C = \frac{-7}{2}$

donc $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}$

$y^2 = x^2 - 7$

d'où $y = -\sqrt{x^2-7}$ (car $y < 0$)

b) $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t}$

$\frac{1}{s}ds = \frac{1}{t}dt$

$\int\frac{1}{s}ds = \int\frac{1}{t}dt$

$\ln|s| = \ln|t| + C$

En remplaçant $s$ par 20 et $t$ par 5, nous obtenons

$\ln 20 = \ln 5 + C$

$\ln 20 - \ln 5 = C$

$\ln 4 = C$

donc $\ln s = \ln t + \ln 4$ ($s > 0$, $t > 0$)

$s = e^{\ln t + \ln 4}$

$s = e^{\ln 4}e^{\ln t}$

d'où $s = 4t$

c) $\frac{x+3}{x-5}dx = \frac{(1+y^2e^{y^2-1})}{y}dy$

$\int\left(1+\frac{8}{x-5}dx\right) = \int\left(\frac{1}{y} + ye^{y^2-1}\right)dy$

$x + 8\ln|x-5| = \ln|y| + \frac{e^{y^2-1}}{2} + C$

En remplaçant $x$ par 6 et $y$ par 1, nous obtenons

$6 + 8\ln 1 = \ln 1 + \frac{e^0}{2} + C$

$C = \frac{11}{2}$

d'où $x + 8\ln|x-5| = \ln|y| + \frac{e^{y^2-1}}{2} + \frac{11}{2}$

d) $\frac{dy}{dx} = e^{2x-y}$

$dy = e^{2x}e^{-y}\,dx$

$e^y\,dy = e^{2x}\,dx$

$\int e^y\,dy = \int e^{2x}\,dx$

$e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

En remplaçant $y$ par 8 et $x$ par 4, nous obtenons

$e^8 = \frac{1}{2}e^8 + C$

$\frac{1}{2}e^8 = C$

donc $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^8$

d'où $y = \ln\left(\frac{e^{2x}+e^8}{2}\right)$

e) $\frac{1}{3-5y}dy = x\,dx$

$\int\frac{1}{3-5y}dy = \int x\,dx$

$\frac{-1}{5}\ln|3-5y| = \frac{x^2}{2} + C$

En remplaçant $y$ par 0 et $x$ par 0, nous obtenons

$\frac{-1}{5}\ln 3 = C$

donc $\frac{-1}{5}\ln|3-5y| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}\ln 3$

$2\ln|3-5y| = -5x^2 + 2\ln 3$

$\ln|3-5y| = \frac{-5x^2}{2} + \ln 3$

$3 - 5y = e^{\frac{-5x^2}{2}+\ln 3}$ $\left(\text{car } y < \frac{3}{5}\right)$

d'où $y = -3e^{\frac{-5x^2}{2}} + \frac{3}{5}$

f) $\frac{1}{\cos^2 x}dx = \sin t\,dt$

$\int\sec^2 x\,dx = \int\sin t\,dt$

$\tan x = -\cos t + C$

En remplaçant $x$ par $\dfrac{\pi}{4}$ et $t$ par $\pi$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{4} &= \text{-}\cos\pi + C\\ 1 &= 1 + C\\ 0 &= C\end{aligned}$$

donc $\tan x = \text{-}\cos t$

d'où $x = \operatorname{Arc}\tan(\text{-}\cos t)$

g) $\dfrac{1}{v^2}\,dv = t\sqrt{2t+3}\,dt$

$\int v^{-2}dv = \int t\sqrt{2t+3}\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2t+3 \Rightarrow \quad t = \frac{u-3}{2}\\ du &= 2\,dt \quad\Rightarrow dt = \frac{1}{2}du\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\int v^{-2}\,dv &= \frac{1}{2}\int\frac{u-3}{2}\sqrt{u}\,du\\ \int v^{-2}\,dv &= \frac{1}{4}\int\left(u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}}\right)du\\ \frac{-1}{v} &= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C\\ \frac{-1}{v} &= \frac{\sqrt{(2t+3)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2t+3)^3}}{2} + C\end{aligned}$$

En remplaçant $v$ par 5 et $t$ par 3, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{-1}{5} &= \frac{\sqrt{9^5}}{10} - \frac{\sqrt{9^3}}{2} + C\\ \frac{-1}{5} &= \frac{243}{10} - \frac{27}{2} + C\\ C &= \text{-}11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc } \frac{-1}{v} &= \frac{\sqrt{(2t+3)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2t+3)^3}}{2} - 11\\ &= \frac{\sqrt{(2t+3)^5} - 5\sqrt{(2t+3)^3} - 110}{10}\end{aligned}$$

d'où $v = \dfrac{10}{110 + 5\sqrt{(2t+3)^3} - \sqrt{(2t+3)^5}}$

h) $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \dfrac{y+1}{1+y^2}\,dy$

$$\begin{aligned}\int 1\,d\theta + \int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta &= \int\frac{y}{1+y^2}\,dy + \int\frac{1}{1+y^2}\,dy\\ \theta + \ln|\sin\theta| &= \frac{\ln(1+y^2)}{2} + \operatorname{Arc}\tan y + C\end{aligned}$$

En remplaçant $y$ par 0 et $\theta$ par $\dfrac{\pi}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} + \ln 1 &= \frac{\ln 1}{2} + \operatorname{Arc}\tan 0 + C\\ C &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

d'où $\theta + \ln|\sin\theta| = \dfrac{\ln(1+y^2)}{2} + \operatorname{Arc}\tan y + \dfrac{\pi}{2}$

**13.** a) $f''(x) = e^x + e^{-x} + \cos x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \int(e^x + e^{-x} + \cos x)\,dx\\ f'(x) &= e^x - e^{-x} + \sin x + C_1\end{aligned}$$

En remplaçant $x$ par 0, nous obtenons

$$\begin{aligned}f'(0) &= e^0 - e^{-0} + \sin 0 + C_1\\ 1 &= 1 - 1 + 0 + C_1\\ 1 &= C_1\end{aligned}$$

donc $f'(x) = e^x - e^{-x} + \sin x + 1$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int(e^x - e^{-x} + \sin x + 1)\,dx\\ f(x) &= e^x + e^{-x} - \cos x + x + C_2\end{aligned}$$

En remplaçant $x$ par 0, nous obtenons

$$\begin{aligned}f(0) &= e^0 + e^{-0} - \cos 0 + 0 + C_2\\ 2 &= 1 + 1 - 1 + C_2\\ 1 &= C_2\end{aligned}$$

d'où $f(x) = e^x + e^{-x} - \cos x + x + 1$

b) $g''(x) = 12x - 8$

$$\begin{aligned}g'(x) &= \int(12x - 8)\,dx\\ g'(x) &= 6x^2 - 8x + C_1\end{aligned}$$

En remplaçant $x$ par 2 et $g'(x)$ par 11, nous obtenons

$$\begin{aligned}11 &= 6(2)^2 - 8(2) + C_1\\ 3 &= C_1\end{aligned}$$

donc $g'(x) = 6x^2 - 8x + 3$

$$\begin{aligned}g(x) &= \int(6x^2 - 8x + 3)\,dx\\ g(x) &= 2x^3 - 4x^2 + 3x + C_2\end{aligned}$$

En remplaçant $x$ par 0 et $g(x)$ par 1, nous obtenons

$1 = C_2$

d'où $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

c) $k''(x) = \dfrac{6}{x^2}$

$k'(x) = \displaystyle\int\frac{6}{x^2}\,dx = \frac{-6}{x} + C$

$$\begin{aligned}m_{\text{normale}(3,\,k(3))} &= 0{,}25\\ \frac{-1}{k'(3)} &= 0{,}25\\ k'(3) &= \text{-}4\\ \frac{-6}{3} + C &= \text{-}4\\ C &= \text{-}2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc } k'(x) &= \frac{-6}{x} - 2\\ k(x) &= \int\left(\frac{-6}{x} - 2\right)dx\\ k(x) &= \text{-}6\ln|x| - 2x + C_1\end{aligned}$$

En remplaçant $x$ par 1 et $k(x)$ par -5, nous obtenons

$$\begin{aligned}\text{-}5 &= \text{-}6\ln 1 - 2(1) + C_1\\ C_1 &= \text{-}3\end{aligned}$$

d'où $k(x) = \text{-}6\ln|x| - 2x - 3$

d) $h''(x) = 6x$

$$h'(x) = \int 6x\,dx$$
$$h'(x) = 3x^2 + C_1$$
$$h(x) = \int (3x^2 + C_1)\,dx$$
$$h(x) = x^3 + C_1x + C_2$$

En remplaçant successivement $x$ par 0 et $x$ par -3, nous obtenons

① $5 = C_2$

② $-4 = (-3)^3 + C_1(-3) + C_2$

De ①, nous trouvons $C_2 = 5$.

En substituant cette valeur dans ②, nous avons

$$-4 = -27 - 3C_1 + 5$$

donc $C_1 = -6$

d'où $h(x) = x^3 - 6x + 5$

**14.** a) $\dfrac{dy}{dx} = xy$

$$\frac{1}{y}\,dy = x\,dx$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx$$
$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$
$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C}$$
$$|y| = e^C e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$y = ke^{\frac{x^2}{2}},\text{ où } k \neq 0$$

b) i) En remplaçant $x$ par 2 et $y$ par $e$, nous obtenons

$$e = ke^2$$

Ainsi $k = \dfrac{1}{e}$

d'où $y = \dfrac{1}{e}e^{\frac{x^2}{2}}$

ii) En remplaçant $x$ par -1 et $y$ par $-e$, nous obtenons

$$-e = ke^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi $k = -\sqrt{e}$

d'où $y = -\sqrt{e}\,e^{\frac{x^2}{2}}$

**15.** a) $(x-4)\,dx + y\,dy = 0$

$$y\,dy = (4-x)\,dx$$
$$\int y\,dy = \int (4-x)\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{-(4-x)^2}{2} + C$$
$$(4-x)^2 + y^2 = C \text{ ou } (x-4)^2 + y^2 = C$$

Ainsi chaque courbe est un cercle centré au point A(4, 0) et de rayon $\sqrt{C}$.

b) Soit

$$m_1 = \frac{4-x}{y}\quad\left(\text{famille de courbes en a) où } \frac{dy}{dx} = \frac{4-x}{y}\right)$$

La pente $m_2$ de la famille cherchée est

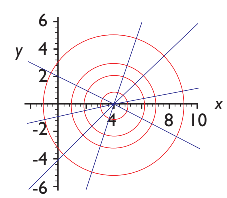
$$m_2 = \frac{y}{x-4}\qquad\left(\text{car } m_2 = \frac{-1}{m_1}\right)$$

Ainsi $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x-4}$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-4}$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x-4}\,dx$$
$$\ln|y| = \ln|x-4| + C$$
$$\ln|y| = \ln|x-4| + \ln|D|$$

d'où $y = D(x-4)$

c)
```
> with(plots):
> c1:=implicitplot((x-4)^2+y^2=1,x=-2..10,y=-6..6,color=red):
> c2:=implicitplot((x-4)^2+y^2=5,x=-2..10,y=-6..6,color=red):
> c3:=implicitplot((x-4)^2+y^2=9,x=-2..10,y=-6..6,color=red):
> c4:=implicitplot((x-4)^2+y^2=25,x=-2..10,
  y=-6..6,color=red):
> d1:=plot(3*(x-4),x=-2..10,y=-6..6,color=blue):
> d2:=plot(-0.5*(x-4),x=-2..10,y=-6..6,color=blue):
> d3:=plot((x-4),x=-2..10,y=-6..6,color=blue):
> d4:=plot(0.2*(x-4),x=-2..10,y=-6..6,color=blue):
> display(c1,c2,c3,c4,d1,d2,d3,d4,scaling=constrained);
```




d) En remplaçant $x$ par 6 et $y$ par $\sqrt{3}$ dans $(x-4)^2 + y^2 = C$, nous obtenons $(6-4)^2 + (\sqrt{3})^2 + C$, donc $C = 7$ et dans $y = D(x-4)$, nous obtenons $\sqrt{3} = D(6-4)$, donc $D = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

d'où les équations $(x-4)^2 + y^2 = 7$

et $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$

**16.** a) $y = \dfrac{k}{\sqrt{x}}$, $m_1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-k}{2\sqrt{x^3}}$

$$m_1 = \frac{-y\sqrt{x}}{2\sqrt{x^3}}\qquad\left(\text{car } k = y\sqrt{x}\right)$$
$$m_1 = \frac{-y}{2x}$$

Puisque la famille $F_2$ est orthogonale à $F_1$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}\qquad(\text{car } m_1m_2 = -1)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\left(\frac{-y}{2x}\right)} = \frac{2x}{y}$$
$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} = x^2 + C$$

d'où $F_2$: $\dfrac{y^2}{2} - x^2 = C$

b) $F_1: y = \dfrac{k}{\sqrt{x}}$ et $F_2: \dfrac{y^2}{2} - x^2 = C$

i) En remplaçant $x$ par 4 et $y$ par 2, nous obtenons

$2 = \dfrac{k}{\sqrt{4}}$, donc $k = 4$ | $\dfrac{(2)^2}{2} - (4)^2 = C$, donc $C = -14$

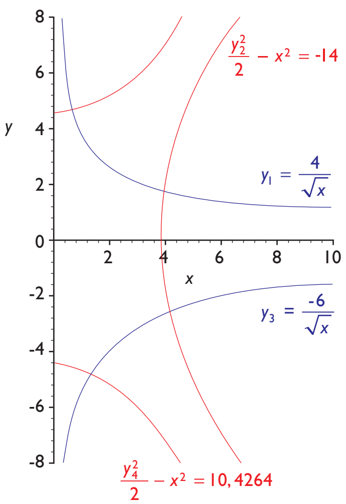
Courbe de $F_1$ : $y_1 = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ | Courbe de $F_2$ : $\dfrac{y_2^2}{2} - x^2 = -14$

ii) En remplaçant $x$ par 1,44 et $y$ par -5

$-5 = \dfrac{k}{\sqrt{1{,}44}}$, donc $k = -6$ | $\dfrac{(-5)^2}{2} - (1{,}44)^2 = C$, donc $C = 10{,}4264$

Courbe de $F_1$ : $y_3 = \dfrac{-6}{\sqrt{x}}$ | Courbe de $F_2$ : $\dfrac{y_4^2}{2} - x^2 = 10{,}4264$

c)
```
> with(plots):
> y1:=plot(4/x^(1/2),x=0..10,y=-8..8,color=blue):
> y2:=implicitplot(y^2/2-x^2=-14,x=0..10,y=-8..8,color=red):
> y3:=plot(-6/x^(1/2),x=0..10,y=-8..8,color=blue):
> y4:=implicitplot(y^2/2-x^2=10.4264,x=0..10,y=-8..8,color=red):
> display(y1,y2,y3,y4,scaling=constrained,view=[0..10,-8..8]);
```




**17.** a)

$F_1: \{y \mid y = e^x + k, \text{ où } k \in \mathbb{R}\}$

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{e^x}$$

$$\int dy = -\int e^{-x}\,dx$$

$$y = e^{-x} + C$$

$F_3: \{y \mid y = e^{-x} + C\}$

$F_2: \{z \mid z = ke^x, \text{ où } k \in \mathbb{R}\}$

$$m_1 = \frac{dz}{dx} = ke^x$$
$$= \left(\frac{z}{e^x}\right)e^x \quad \left(\text{car } k = \frac{z}{e^x}\right)$$
$$= z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{z}$$

$$\int z\,dz = -\int dx$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + C_1$$

$F_4: \{z \mid z^2 + 2x = K\}$

b)

En remplaçant $x$ par 0 et $y$ par 3

dans $F_1$ : $3 = e^0 + k$, donc $k = 2$

$y_1 = e^x + 2$

dans $F_3$ : $3 = e^0 + C$, donc $C = 2$

$y_3 = e^{-x} + 2$

En remplaçant $x$ par 0 et $z$ par 3

dans $F_2$ : $3 = ke^0$, donc $k = 3$

$z_2 = 3e^x$

dans $F_4$ : $3^2 + 2(0) = K$, donc $K = 9$

$C_4$ : $z^2 + 2x = 9$

c)

$y_1 = e^x + 5$

Si $x = 2$, $y_1 = e^2 + 5$

En remplaçant $x$ par 2 et $y$ par $e^2 + 5$, dans $F_3$

$e^2 + 5 = e^{-2} + C$

$C = e^2 + 5 - e^{-2}$

d'où $y_3 = e^{-x} + (e^2 + 5 - e^{-2})$

$y_2 = e^x - 3$

Si $x = 2$, $y_2 = e^2 - 3$

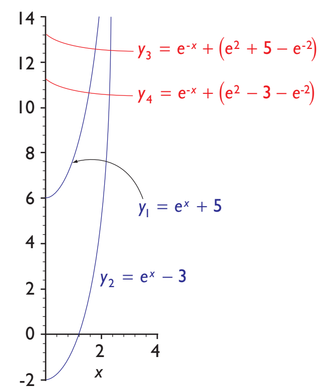
En remplaçant $x$ par 2 et $y$ par $e^2 - 3$, dans $F_3$

$e^2 - 3 = e^{-2} + C$

$C = e^2 - 3 - e^{-2}$

d'où $y_4 = e^{-x} + (e^2 - 3 - e^{-2})$

```
> with(plots):
> y1:=plot(exp(x)+5,x=0..4,color=blue):
> y2:=plot(exp(x)-3,x=0..4,color=blue):
> y3:=plot(exp(-x)+exp(2)+5-exp(-2),x=0..4,color=red):
> y4:=plot(exp(-x)+exp(2)+3-exp(-2),x=0..4,color=red):
>display(y1,y2,y3,y4,scaling=constrained,view=[0..4,-3..15]);
```




d)

$z_1 = 5e^x$

Si $x = 2$, $z_1 = 5e^2$

En remplaçant $x$ par 2 et $z$ par $5e^2$, dans $F_4$

$(5e^2)^2 + 2(2) = K$

$K = 25e^4 + 4$

d'où $C_3$ : $z^2 + 2x = 25e^4 + 4$

$z_2 = -3e^x$

Si $x = 2$, $z_2 = -3e^2$

En remplaçant $x$ par 2 et $z$ par $-3e^2$, dans $F_4$

$(-3e^2) + 2(2) = K$

$K = 9e^4 + 4$

d'où $C_4$ : $z^2 + 2x = 9e^4 + 4$

**18.** a) $a = -9{,}8$

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8$$
$$dv = -9{,}8\,dt$$
$$\int dv = \int (-9{,}8)\,dt$$
$$v = -9{,}8t + C_1$$

2

En remplaçant $t$ par 0 et $v$ par 24,5, nous obtenons

$$24{,}5 = -9{,}8(0) + C_1$$
$$24{,}5 = C_1$$
d'où $v = -9{,}8t + 24{,}5$

b) $\dfrac{dh}{dt} = -9{,}8t + 24{,}5$

$$dh = (-9{,}8t + 24{,}5)\,dt$$
$$\int dh = \int (-9{,}8t + 24{,}5)\,dt$$
$$h = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + C_2$$

En remplaçant $t$ par 0 et $h$ par 245, nous obtenons

$$245 = -4{,}9(0)^2 + 24{,}5(0) + C_2$$
$$245 = C_2$$
d'où $h = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + 245$

c) À sa hauteur maximale, la vitesse est nulle.
Donc $-9{,}8t + 24{,}5 = 0$
$-9{,}8t = -24{,}5$
d'où $t = 2{,}5$ s

d) $h(2{,}5) = -4{,}9(2{,}5)^2 + 24{,}5(2{,}5) + 245$
d'où 275,625 m

e) Déterminons $t$ lorsque $h = 0$.
$$-4{,}9t^2 + 24{,}5t + 245 = 0$$
donc $t = \dfrac{-24{,}5 - \sqrt{24{,}5^2 - 4(-4{,}9)(245)}}{2(-4{,}9)} = 10$
$$v(10) = -9{,}8(10) + 24{,}5$$
d'où 73,5 m/s

**19.** Puisque $\dfrac{dv}{dt} = a$

$$dv = \frac{100}{(25-2t)^2}\,dt \qquad \left(\text{car } a = \frac{100}{(25-2t)^2}\right)$$
$$\int dv = 100\int \frac{1}{(25-2t)^2}\,dt$$
$$v = \frac{50}{(25-2t)} + C$$

En remplaçant $t$ par 0 et $v$ par 4, nous obtenons

$4 = \dfrac{50}{25} + C_1$, donc $C_1 = 2$

Ainsi $v = \dfrac{50}{(25-2t)} + 2$

Puisque $\dfrac{dx}{dt} = v$
$$dx = \left(\frac{50}{25-2t} + 2\right)dt$$
$$\int dx = \int\left(\frac{50}{25-2t} + 2\right)dt$$
$$x = -25\ln|25-2t| + 2t + C$$

Distance parcourue $= x(7) - x(3)$
$= (-25\ln 11 + 14) - (-25\ln 19 + 6)$
$= 8 + 25\ln\left(\dfrac{19}{11}\right)$

d'où $d \approx 21{,}66$ mètres

**20.** a) $a = kt$
$$\frac{dv}{dt} = kt \qquad \left(\text{car } a = \frac{dv}{dt}\right)$$
$$\int dv = \int kt\,dt$$
$$v = k\frac{t^2}{2} + C$$

En remplaçant $t$ par 0 et $v$ par 27, nous obtenons

$27 = k0 + C$, ainsi $C = 27$, donc
$$v = k\frac{t^2}{2} + 27$$

En remplaçant $t$ par 2 et $v$ par 24, nous obtenons

$24 = k\dfrac{(2)^2}{2} + 27$, ainsi $k = \dfrac{-3}{2}$, donc
$$v = \frac{-3t^2}{4} + 27$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-3t^2}{4} + 27 \qquad \left(\text{car } v = \frac{dx}{dt}\right)$$
$$\int dx = \int\left(\frac{-3t^2}{4} + 27\right)dt$$
$$x = \frac{-t^3}{4} + 27t + C$$

En remplaçant $t$ par 2 et $x$ par 55, nous obtenons

$55 = \dfrac{-(2)^3}{4} + 27(2) + C$, ainsi $C = 3$, donc
$$x = \frac{-t^3}{4} + 27t + 3$$

i) $v(4) = \dfrac{-3(4)^2}{4} + 27 = 15$, d'où $v(4) = 15$ m/s

$x(4) = \dfrac{-(4)^3}{4} + 27(4) + 3 = 95$, d'où $x(4) = 95$ m

ii) $v(7) = \dfrac{-3(7)^2}{4} + 27 = -9{,}75$, d'où $v(7) = -9{,}75$ m/s

$x(7) = \dfrac{-(7)^3}{4} + 27(7) + 3 = 106{,}25$
d'où $x(7) = 106{,}25$ m

b) En posant $v = 0$, nous obtenons
$$\frac{-3t^2}{4} + 27 = 0$$
$t^2 = 36$, donc $t = 6$ s (-6 est à rejeter)
Ainsi la particule s'arrête après 6 secondes et change de direction, car $v$ change de signe.

i) $d_{[0\,\text{s},\,4\,\text{s}]} = x(4) - x(0) = 95 - 3 = 92$
d'où $d_{[0\,\text{s},\,4\,\text{s}]} = 92$ m

ii) $d_{[0\,\text{s},\,7\,\text{s}]} = d_{[0\,\text{s},\,6\,\text{s}]} + d_{[6\,\text{s},\,7\,\text{s}]}$
$= x(6) - x(0) + |x(7) - x(6)|$
$= 111 - 3 + |106{,}25 - 111|$
$= 108 + 4{,}75$
d'où $d_{[0\,\text{s},\,7\,\text{s}]} = 112{,}75$ m

**21.** a) $a = \sqrt{2v+9}$

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2v+9} \qquad \left(\text{car } a = \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2v+9}}\,dv = \int dt$$

$$\sqrt{2v+9} = t + C$$

En posant $t = 0$ et $v = 0$, nous obtenons

$$\sqrt{9} = 0 + C, \text{ ainsi } C = 3, \text{ donc}$$

$$\sqrt{2v+9} = t + 3$$

$$2v + 9 = (t+3)^2$$

$$v = \frac{t^2}{2} + 3t \qquad (\text{équation 1})$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{2} + 3t \qquad \left(\text{car } v = \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\int dx = \int\left(\frac{t^2}{2} + 3t\right)dt$$

$$x = \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} + C_1$$

En posant $t = 0$ et $x = 0$, nous obtenons $C = 0$, donc

$$x = \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} \qquad (\text{équation 2})$$

En posant $v = 20$ dans l'équation 1,

$$20 = \frac{t^2}{2} + 3t, \text{ donc } t = 4 \text{ ou } t = -10 \qquad (\text{à rejeter})$$

d'où $x(4) = 34,\overline{6}$ mètres

b) En posant $x = 100$ dans l'équation 2

$$100 = \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2}$$

À l'aide de Maple, nous obtenons

```
> x:=t->t^3/6+3*t^2/2;
```

$$x := t \to \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2$$

```
> t1:=fsolve(x(t)=100);
```

$$t1 := 6.268665363$$

```
> v:=t->t^2/2+3*t;
```

$$v := t \to \frac{1}{2}t^2 + 3t$$

```
> v(t1);
```

$$38.45407881$$

d'où $v(6{,}26\ldots) \approx 38{,}45$ m/s

**22.** a) $\dfrac{dP}{dt} = 0{,}009P$

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int 0{,}009\,dt$$

$$\ln|P| = 0{,}009t + C$$

En remplaçant $t$ par 0 (année 2000) et $P$ par 281, nous obtenons

$$\ln 281 = 0 + C, \text{ ainsi } C = \ln 281$$

d'où $\ln P = 0{,}009t + \ln 281$ ①

$P = 281e^{0{,}009t}$ ②

b) De ①, nous obtenons $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{P}{281}\right)}{0{,}009}$ ③

c) En posant $t = 12$ (année 2012) dans ②
$P \approx 313$ millions

d) En posant $P = 350$ dans ③

$$t = \frac{\ln\left(\frac{350}{281}\right)}{0{,}009} = 24{,}397\ldots$$

d'où vers le milieu de l'année 2024.

**23.** a) $\dfrac{dP}{dt} = KP$ où $P$ est la population et $t$ le temps en années

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int K\,dt$$

$$\ln|P| = Kt + C$$

$$\ln P = Kt + C \qquad (\text{car } P > 0)$$

En remplaçant $t$ par 0 (en 1980) et $P$ par 2000, nous obtenons $\ln 2000 = K(0) + C$, ainsi $C = \ln 2000$, donc $\ln P = Kt + \ln 2000$

En remplaçant $t$ par 10 (en 1990) et $P$ par 600, nous obtenons $\ln 600 = K(10) + \ln 2000$, donc

$$K = \frac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{10}$$

d'où $\ln P = \dfrac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{10}t + \ln 2000$ ①

$P = 2000e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{10}t}$ ②

ou $P = 2000\left(\dfrac{3}{10}\right)^{\frac{t}{10}}$ ③

En posant $t = 32$ (2012) dans ②
$P \approx 42$ bélougas

b) En posant $P = 30$ dans ①

$$\ln 30 = \frac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{10}t + \ln 2000$$

$$\ln\left(\frac{30}{2000}\right) = \frac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{10}t$$

$$t = \frac{10\ln\left(\frac{3}{200}\right)}{\ln\left(\frac{3}{10}\right)} = 34{,}88\ldots$$

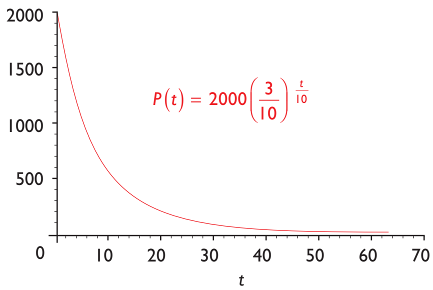
d'où vers la fin de l'année 2015 $(1980 + 34{,}88\ldots)$

c) En remplaçant $P$ par 1 dans ① (notez qu'on ne peut pas remplacer $P$ par 0, car $\ln 0$ n'est pas définie), $t = 63{,}1$, d'où vers le début de 2043 $(1980 + 63{,}1)$.

d)
```
> P:=t->2000*(3/10)^(t/10);
```

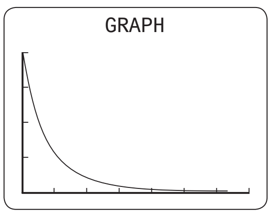
$$P := t \to 2000\left(\frac{3}{10}\right)^{(1/10\,t)}$$

```
> plot(P(t),t=0..t1,color=orange);
```




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2000(3/10)^
(X/10)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=60
Xscl=10
Ymin=0
Ymax=2500
Yscl=500
Xres=1
```




**24.** $$\frac{dP}{dt} = -0{,}04P$$

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int -0{,}04\,dt$$
$$\ln P = -0{,}04t + C$$

Ne connaissant pas la population initiale, nous remplaçons $P$ par $P_0$ lorsque $t = 0$ nous obtenons $\ln P = -0{,}04t + \ln P_0$ ①

En posant $P = \frac{P_0}{2}$ dans ①, $t = 17{,}328\ldots$

d'où environ 17,33 jours.

**25.** a) $$\frac{dQ}{dt} = -0{,}055Q$$

$$\int \frac{1}{Q}\,dQ = \int (-0{,}055)\,dt$$
$$\ln Q = -0{,}055t + C \qquad (\text{car } Q > 0)$$

En remplaçant $Q$ par $Q_0$ et $t$ par 0, nous obtenons

$\ln Q_0 = -0{,}055(0) + C$, donc $C = \ln Q_0$

ainsi

$\ln Q = -0{,}055t + \ln Q_0$ ①

$Q = Q_0 e^{-0{,}055t}$ ②

En posant $t = 3$ dans ②, $Q \approx 0{,}85Q_0$

b) En posant $t = 24$ dans ②, $Q \approx 0{,}27Q_0$, d'où environ $0{,}73Q_0$ est désintégrée.

c) En posant $Q = \frac{Q_0}{2}$ dans ①, $t \approx 12{,}6$ heures.

d) En posant $Q = 0{,}01Q_0$ dans ①, $t \approx 83{,}7$ heures.

**26.** a) $$\frac{dQ}{dt} = -0{,}0187Q$$

$$\int \frac{1}{Q}\,dQ = \int -0{,}0187\,dt$$
$$\ln Q = -0{,}0187t + C \qquad (\text{car } Q > 0)$$

En remplaçant $Q$ par $Q_0$ et $t$ par 0, nous obtenons $\ln Q_0 = -0{,}0187(0) + C$, donc $C = \ln Q_0$

ainsi

$\ln Q_0 = -0{,}0187t + \ln Q_0$ ①

$Q = Q_0 e^{-0{,}0187t}$ ②

En posant $Q = \frac{Q_0}{2^7}$ dans ①, $t \approx 259$ ans.

b) Puisque $Q = \frac{Q_0}{2^7}$, $Q \approx 0{,}0078Q_0$

d'où il reste environ 0,78 % de la quantité initiale.

**27.** a) $$\frac{dP}{dh} = KP$$
$$\frac{dP}{P} = K\,dh$$
$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int K\,dh$$
$$\ln P = Kh + C \qquad (\text{car } P > 0)$$

En posant $P = 1$ et $h = 0$, nous obtenons

$\ln 1 = K(0) + C$, donc $C = \ln 1 = 0$,

Ainsi $\ln P = Kh$

En posant $P = 0{,}56$ et $h = 5$, nous obtenons

$\ln(0{,}56) = K5$, donc $K = \frac{\ln(0{,}56)}{5}$, ainsi

$\ln P = \frac{\ln(0{,}56)}{5}h$ ①

$P = e^{\frac{\ln(0{,}56)}{5}h}$ ②

$P = (0{,}56)^{\frac{h}{5}}$ ③

En posant $h = 8{,}85$ dans ②, $P = 0{,}358\ldots$

d'où $P \approx 0{,}36$ atm

b) En posant $P = 0{,}5$ dans ①,

$$\ln(0{,}5) = \frac{\ln(0{,}56)}{5}h$$
$$h = \frac{5\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}56)} = 5{,}977\,2\ldots$$

d'où $h \approx 5977$ mètres

**28.** a) $$\frac{dP}{dt} = (0{,}04 - 0{,}01)P - 240$$
$$\frac{dP}{0{,}03P - 240} = dt$$
$$\int \frac{1}{0{,}03P - 240}\,dP = \int dt$$
$$\frac{1}{0{,}03}\ln|0{,}03P - 240| = t + C$$

En posant $P = 46\,000$ et $t = 0$ (en 1995), nous obtenons

$\frac{1}{0{,}03}\ln 1140 = 0 + C$, donc $C = \frac{\ln 1140}{0{,}03}$

$$\text{ainsi } \frac{1}{0{,}03}\ln|0{,}03P - 240| = t + \frac{\ln 1140}{0{,}03}$$

$$\ln(0{,}03P - 240) = 0{,}03t + \ln 1140 \quad ①$$

$$(\text{car } (0{,}03P - 240) > 0)$$

$$0{,}03P - 240 = 1140e^{0{,}03t}$$

$$0{,}03P = 240 + 1140e^{0{,}03t}$$

$$P = 8000 + 38\,000e^{0{,}03t} \quad ②$$

En posant $t = 20$ (en 2015) dans ②,
$P \approx 77\ 240$ habitants.

b) En posant $P = 92\ 000$ dans ①, $t \approx 26{,}44$ années.

**29.** a)

$$\frac{dN}{dt} = K(500\,000 - N)$$

$$\frac{dN}{500\,000 - N} = K\,dt$$

$$\int \frac{1}{500\,000 - N}\,dN = \int K\,dt$$

$$-\ln|500\,000 - N| = Kt + C$$

En posant $N = 50\ 000$ et $t = 0$, nous obtenons
$-\ln 450\,000 = K(0) + C$, donc $C = -\ln 450\,000$.
En posant $N = 80\ 000$ et $t = 2$, nous obtenons

$$-\ln 420\,000 = K(2) - \ln 450\,000, \text{ donc } K = \frac{\ln\left(\frac{15}{14}\right)}{2}$$

$$\text{ainsi } -\ln|500\,000 - N| = \frac{\ln\left(\frac{15}{14}\right)}{2}t - \ln 450\,000$$

$$\ln(500\,000 - N) = \frac{\ln\left(\frac{14}{15}\right)}{2}t + \ln 450\,000 \quad ①$$

$$(\text{car } (500\,000 - N) > 0)$$

$$500\,000 - N = 450\,000e^{\frac{\ln\left(\frac{14}{15}\right)}{2}t}$$

$$N = 500\,000 - 450\,000e^{\frac{\ln\left(\frac{14}{15}\right)}{2}t} \quad ②$$

$$\text{ou} \qquad N = 500\,000 - 450\,000\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{t}{2}} \quad ③$$

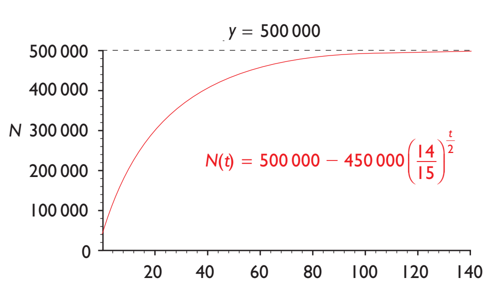
En posant $t = 24$ dans ③, $N \approx 303\ 368$ bactéries.

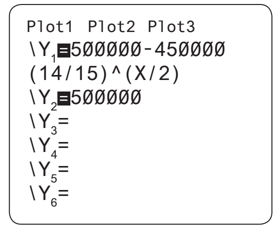
b) En posant $P = 450\ 000$ dans ①, $t \approx 63{,}7$ heures.

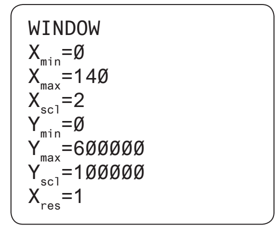
c)
```
> with(plots):
> N:=t->500000-450000*(14/15)^(t/2);
```

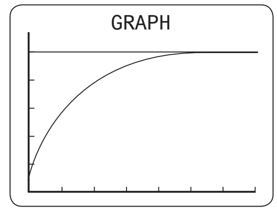
$$N := t \to 500000 - 450000\left(\frac{14}{15}\right)^{(1/2t)}$$

```
> NN:=plot(N(t),t=0..150,N=0..500000,color=orange):
> y:=plot(500000,t=0..150,linestyle=4,color=black):
> display(NN,y);
```




**30.** a)

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 22)$$

$$\int \frac{dT}{T - 22} = \int K\,dt$$

$$\ln|T - 22| = kt + C$$

En remplaçant $t$ par 0 et $T$ par 55, nous obtenons
$\ln|55 - 22| = C$, donc $C = \ln 33$, ainsi
$\ln(T - 22) = Kt + \ln 33 \quad (\text{car } T > 22)$
En remplaçant $t$ par 15 et $T$ par 45, nous obtenons

$$\ln 23 = K(15) + \ln 33, \text{ donc } K = \frac{\ln\left(\frac{23}{33}\right)}{15}, \text{ ainsi}$$

$$\ln(T - 22) = \frac{\ln\left(\frac{23}{33}\right)}{15}t + \ln 33 \quad ①$$

$$T - 22 = e^{\frac{\ln\left(\frac{23}{33}\right)}{15}t + \ln 33}$$

$$T = 22 + 33e^{\frac{\ln\left(\frac{23}{33}\right)}{15}t} \quad ②$$

$$\text{ou} \qquad T = 22 + 33\left(\frac{23}{33}\right)^{\frac{t}{15}} \quad ③$$

En posant $T = 40$ dans ①,

$$\ln(40 - 22) = \frac{\ln\left(\frac{23}{33}\right)}{15}t + \ln 33$$

$$t = \frac{15\ln\left(\frac{18}{33}\right)}{\ln\left(\frac{23}{33}\right)} = 25{,}184\ldots$$

d'où environ 25,2 minutes.

b) i) En posant $t = 30$ dans ③,

$$T = 22 + 33\left(\frac{23}{33}\right)^2 = 38{,}\overline{03}$$

d'où $T = 38{,}\overline{03}$ °C

ii) Soit $x$, le nombre de litres d'eau à 55° C qu'elle doit ajouter

$$150(38{,}\overline{03}) + x(55) = (150 + x)40$$

$$5704{,}545\ldots + 55x = 6000 + 40x$$

$$15x = 295{,}454\ldots$$

$$x = 19{,}\overline{69}$$

d'où $19{,}\overline{69}$ litres.

2

**31.**
$$\frac{dT}{dt} = K(T - A)$$
$$\frac{dT}{T-21} = K\,dt \qquad (\text{car } A = 21)$$
$$\int \frac{1}{T-21}\,dT = \int K\,dt$$
$$\ln|T-21| = Kt + C$$
$$\ln(T-21) = Kt + C \qquad (\text{car } T > 21)$$

En posant $T = 35$ et $t = 0$ (17 h), nous obtenons

$\ln(35 - 21) = K(0) + C$, donc $C = \ln 14$

ainsi $\ln(T - 21) = Kt + \ln 14$

En posant $T = 33{,}5$ et $t = 1$, nous obtenons

$\ln(33{,}5 - 21) = K(1) + \ln 14$, donc $K = \ln\left(\frac{12{,}5}{14}\right)$

Ainsi $\ln(T-21) = \ln\left(\frac{12{,}5}{14}\right)t + \ln 14$

En posant $T = 37$, $\ln 16 = \ln\left(\frac{12{,}5}{14}\right)t + \ln 14$

donc $t \approx -1{,}178$

Donc, le décès s'est produit environ 1 h 10 min 41 s avant 17 h, d'où entre 15 h 49 et 15 h 50.

**32.** a) Soit $T$, la température du premier objet.
$$\frac{dT}{dt} = K(T - 20)$$
$$\int \frac{1}{T-20}\,dT = \int K\,dt$$
$$\ln(T-20) = Kt + C \qquad (\text{car } T > 20)$$

En posant $T = 90$ et $t = 0$, nous obtenons

$\ln(90 - 20) = K(0) + C$, donc $C = \ln 70$

Ainsi $\ln(T - 20) = Kt + \ln 70$

En posant $T = 60$ et $t = 10$, nous obtenons

$\ln(60 - 20) = K(10) + \ln 70$

donc $K = \dfrac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{10}$

$$\text{Ainsi } \ln(T-20) = \frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{10}t + \ln 70 \qquad ①$$
$$T = 20 + 70e^{\frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{10}t} \qquad ②$$
$$T = 20 + 70\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{t}{10}} \qquad ③$$

Soit $z$, la température du second objet.

De façon analogue, nous obtenons
$$\ln(z-20) = \frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{10}t + \ln 60 \qquad ④$$
$$z = 20 + 60e^{\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{10}t} \qquad ⑤$$
$$z = 20 + 60\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{t}{10}} \qquad ⑥$$

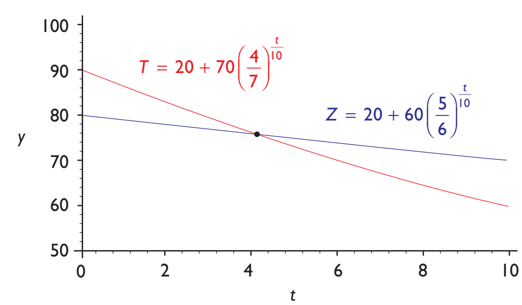
En posant $\ln(T - 20) = \ln(z - 20)$

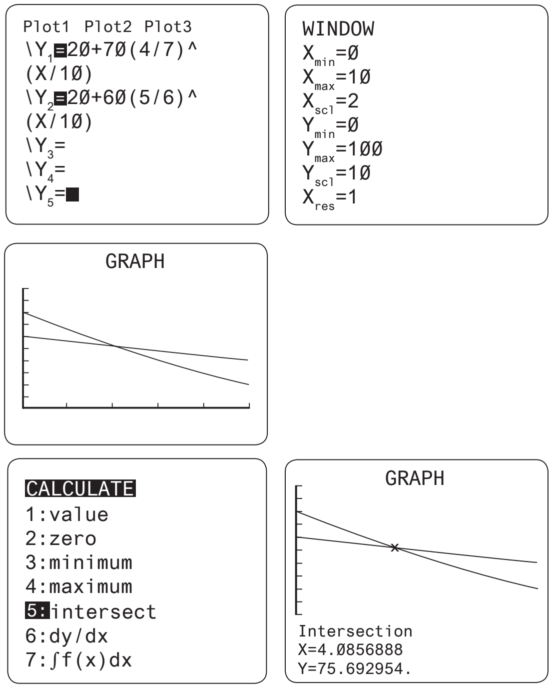
De ① et ④
$$\frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}{10}t + \ln 70 = \frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{10}t + \ln 60$$
$$t\left(\frac{\ln\left(\frac{4}{7}\right) - \ln\left(\frac{5}{6}\right)}{10}\right) = \ln 60 - \ln 70$$
$$t = \frac{10\ln\left(\frac{6}{7}\right)}{\ln\left(\frac{24}{35}\right)}$$
$$t \approx 4{,}09 \text{ minutes}$$

b) En posant $t = \dfrac{10\ln\left(\frac{6}{7}\right)}{\ln\left(\frac{24}{35}\right)}$ dans ②, ③, ⑤ ou ⑥

$T = z \approx 75{,}7\,°\text{C}$

c)
```
> with(plots):
> T:=t->20+70*(4/7)^(t/10);
```
$$T := t \to 20 + 70\left(\frac{4}{7}\right)^{(1/10\,t)}$$
```
> Z:=t->20+60*(5/6)^(t/10);
```
$$Z := t \to 20 + 60\left(\frac{5}{6}\right)^{(1/10\,t)}$$
```
> t0:=fsolve(T(t)=Z(t));
```
$$t0 := 4.085688757$$
```
> T0:=T(t0);
```
$$T0 := 75.69295450$$
```
> TT:=plot(T(t),t=0..10,y=50..100,color=orange):
> ZZ:=plot(Z(t),t=0..10,y=50..100,color=blue):
> P:=plot([[t0,T(t0)]],style=point,symbol=circle,
  color=black):
> display(TT,ZZ,P);
```






**33.** a) Soit $V$, la valeur de l'île de Manhattan et $j$, le taux d'intérêt nominal.

$$\frac{dV}{dt} = jV$$

$$\frac{dV}{V} = j\,dt$$

$$\int \frac{1}{V}\,dV = \int j\,dt$$

$$\ln|V| = jt + C$$

Puisque $V = 24$ lorsque $t = 0$ (en 1626), nous obtenons $\ln 24 = 0 + C$, donc $C = \ln 24$

Ainsi $\ln V = jt + \ln 24 \qquad (\text{car } V > 0)$ ①

Puisque $V = 6 \times 10^{11}$ lorsque $t = 364$ (en 1990), nous obtenons $\ln 6 \times 10^{11} = j(364) + \ln 24$

$$\text{Ainsi } j = \frac{\ln 6 \times 10^{11} - \ln 24}{364} = \frac{\ln\left(\frac{6 \times 10^{11}}{24}\right)}{364} = 0{,}065\,7\ldots$$

d'où $j \approx 6{,}58\ \%$

b) De ① $\ln V = jt + \ln 24$, nous obtenons

$$V = 24e^{jt}$$

En remplaçant $j$ par $\dfrac{\ln\left(\frac{6 \times 10^{11}}{24}\right)}{364} = 0{,}065\,7\ldots$

$$V = 24e^{(0{,}065\,7\ldots)400} = 6{,}404\,9\ldots \times 10^{12}$$

d'où environ $6{,}4 \times 10^{12}$ \$

**34.** a) $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{45(1{,}5)^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$

$$\int dv = \int 45\frac{(1{,}5)^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$V = 45\left(\frac{2(1{,}5)^{\sqrt{t}}}{\ln(1{,}5)}\right) + C$$

En posant $V = 2000$ et $t = 0$, nous obtenons

$$2000 = \frac{90}{\ln(1{,}5)} + C, \text{ donc } C = 2000 - \frac{90}{\ln(1{,}5)}$$

$$\text{Ainsi, } V \approx \frac{90(1{,}5)^{\sqrt{t}}}{\ln(1{,}5)} + 1778{,}03$$

En remplaçant $t$ par 10, nous obtenons $V \approx 2578{,}12$ \$ d'où environ 2578 \$.

b) En remplaçant $V$ par 2377, nous obtenons

$$2377 \approx \frac{90(1{,}5)^{\sqrt{t}}}{\ln(1{,}5)} + 1778{,}03$$

$$(1{,}5)^{\sqrt{t}} \approx \frac{(2377 - 1778{,}03)\ln(1{,}5)}{90}$$

$$\ln(1{,}5)^{\sqrt{t}} \approx \ln\left(\frac{598{,}97\ln(1{,}5)}{90}\right)$$

$$\sqrt{t} \approx \frac{\ln\left(\frac{598{,}97\ln(1{,}5)}{90}\right)}{\ln(1{,}5)} \approx 2{,}448\,2\ldots$$

$$t \approx 5{,}993\ldots$$

d'où environ 6 ans.

**35.** a) $\dfrac{dV}{dt} = 0{,}0575V$

$$\int \frac{1}{V}\,dV = 0{,}0575\,dt$$

$$\ln V = 0{,}0575t + C \qquad (\text{car } V > 0)$$

En remplaçant $V$ par 10 000 et $t$ par 0, nous obtenons $\ln 10\,000 = 0{,}0575(0) + C$, donc $C = \ln 10\,000$

ainsi

$\ln V = 0{,}0575t + \ln 10\,000$ ①

$V = 10\,000e^{0{,}0575t}$ ②

En posant $t = 8$ dans ②, $V \approx 15\,841$ \$.

b) En posant $V = 20\,000$ dans ①, $t \approx 12$ ans.

c) Soit $i$, le taux cherché.

$\ln V = it + \ln 10\,000$ ③

En remplaçant $V$ par 15 841 et $t$ par 7 dans ③, nous obtenons

$$\ln 15\,841 = i(7) + \ln 10\,000$$

Ainsi $i \approx 0{,}0657$

d'où $i \approx 6{,}57\,\%$

d) Soit $V_0$, le capital initial.

$$\ln V = 0{,}0625t + \ln V_0$$

En remplaçant $V$ par 15 841 et $t$ par 8, nous obtenons

$$\ln 15\,841 = 0{,}0625(8) + \ln V_0$$

$$V_0 \approx 9608\ \$$$

e) Soit $V_1$, le capital initial.

$$\ln V = 0{,}05t + \ln V_1$$

En remplaçant $V$ par 30 000 et $t$ par 25, nous obtenons

$$\ln 30\,000 = 0{,}05(25) + \ln V_1$$

$$V_1 \approx 8595\ \$$$

**36.** a) $\dfrac{dh}{dt} = K\sqrt{h}$

$\dfrac{dh}{\sqrt{h}} = K\,dt$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = \int K\,dt$

$2\sqrt{h} = Kt + C$

En posant $h = 64$ et $t = 0$, nous obtenons

$2\sqrt{64} = K(0) + C$, donc $C = 16$

Ainsi $2\sqrt{h} = Kt + 16$

Puisque $V = \pi(20)^2 64$ est le volume initial, après 5 minutes il reste $\dfrac{V}{4} = \dfrac{\pi(20)^2 64}{4}$

ainsi $h = \dfrac{64}{4}$ car le rayon 20 est constant.

En posant $h = 16$ et $t = 5$, nous obtenons

$2\sqrt{16} = K(5) + 16$, donc $K = \dfrac{-8}{5}$

Ainsi $2\sqrt{h} = \dfrac{-8}{5}t + 16$

$\sqrt{h} = 8 - \dfrac{4t}{5}$

d'où $h = \left(8 - \dfrac{4t}{5}\right)^2$, exprimée en cm.

b) En posant $h = 0$, nous trouvons $t = 10$. Il faut 10 minutes au total pour vider le réservoir, d'où il faut 5 minutes pour vider le reste.

**37.** a) Soit $Q$, la quantité de sel dans l'eau à chaque instant.

Nous ajoutons $\dfrac{30 \text{ litres}}{\text{min}} \times \dfrac{0 \text{ kg}}{\text{litres}} = 0$ kg/min, et à chaque minute la quantité de sel s'élimine au rythme

de $\dfrac{30 \text{ litres}}{\text{min}} \times \dfrac{Q \text{ kg}}{900 \text{ litres}} = \dfrac{Q}{30}$ kg/min

Ainsi $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{-Q}{30}$

$\dfrac{dQ}{Q} = \dfrac{-1}{30}\,dt$

$\displaystyle\int \frac{1}{Q}\,dQ = \int \frac{-1}{30}\,dt$

$\ln Q = \dfrac{-t}{30} + C \qquad (\text{car } Q > 0)$

En posant $Q = 100$ et $t = 0$, nous obtenons

$\ln 100 = 0 + C$, donc $C = \ln 100$

Ainsi $\ln Q = \dfrac{-t}{30} + \ln 100$ ①

d'où $Q = 100e^{\frac{-t}{30}}$ ②

b) En posant $t = 60$ dans ②, $Q \approx 13{,}53$ kg.

c) En posant $Q = 0{,}05$ dans ①, $t \approx 228$ min, d'où environ 3 h et 48 min.

**38.** a) Soit $Q$, la quantité de sel dans l'eau à chaque instant.

Nous ajoutons $\dfrac{20 \text{ litres}}{\text{min}} \times \dfrac{0{,}2 \text{ kg}}{\text{litres}} = 4$ kg/min, et à chaque minute la quantité de sel s'élimine au rythme

de $\dfrac{20 \text{ litres}}{\text{min}} \times \dfrac{Q \text{ kg}}{700 \text{ litres}} = \dfrac{Q}{35}$ kg/min

d'où $\dfrac{dQ}{dt} = \left(4 - \dfrac{Q}{35}\right)$

b) $\dfrac{dQ}{140 - Q} = \dfrac{dt}{35}$

$\displaystyle\int \frac{1}{140 - Q}\,dQ = \int \frac{1}{35}\,dt$

$-\ln(140 - Q) = \dfrac{t}{35} + C \qquad (\text{car } 140 > Q)$

En posant $Q = 0$ et $t = 0$, nous obtenons

$-\ln 140 = 0 + C$, donc $C = -\ln 140$

$-\ln(140 - Q) = \dfrac{t}{35} - \ln 140$

Ainsi $\ln(140 - Q) = \dfrac{-t}{35} + \ln 140$ ①

d'où $Q = 140 - 140e^{\frac{-t}{35}}$ ②

c) En posant $t = 24$ dans ②, $Q \approx 69{,}5$ kg.

d) En posant $Q = \dfrac{700 \times 0{,}2}{2} = 70$ dans ①, $t \approx 24{,}26$ min.

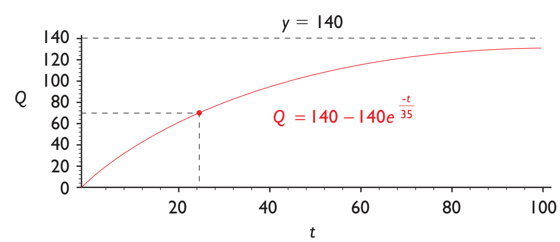
e)
```
> with(plots):
> Q:=t->140-140*exp(-t/35);
```

$$Q := t \to 140 - 140e^{(-1/35t)}$$

```
> t0:=fsolve(Q(t)=70);
```

$$t0 := 24.26015132$$

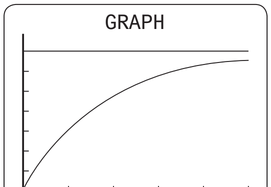
```
> QQ:=plot(Q(t),t=0..100,Q=0..140,color=orange):
> y:=plot(Q(t0),t=0..t0,linestyle=4,color=black):
> P:=plot([[t0,Q(t0)]],style=point,symbol=circle,color=orange):
> h:=plot(140,t=0..100,linestyle=4,color=black):
> x:=plot([t0,Q,Q=0..Q(t0)],linestyle=4,color=black):
> display(QQ,y,P,x,h);
```




```
Plot1  Plot2  Plot3
\Y1=140-140e^(-X/35)
\Y2=140
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=120
Xscl=20
Ymin=0
Ymax=150
Yscl=20
Xres=1
```

GRAPH



# Solutionnaire
# Problèmes de synthèses

## Chapitre 2 (page 126)

**1.** a) $\displaystyle\int \frac{4}{7+5e^{3x}}\,dx = 4\int \frac{e^{-3x}}{7e^{-3x}+5}\,dx$

$\displaystyle = \frac{-4}{21}\int \frac{1}{u}\,du \qquad (u = 7e^{-3x}+5)$

$\displaystyle = \frac{-4}{21}\ln|u| + C$

$\displaystyle = \frac{-4}{21}\ln(7e^{-3x}+5) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,dx = \int \frac{1}{e^{-x}(e^{2x}+2e^x+1)}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{1}{u^2}\,du \qquad (u = e^x+1)$

$\displaystyle = \frac{-1}{u} + C$

$\displaystyle = \frac{-1}{e^x+1} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{4t}-1}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{(e^{2t})^2-1}}\,dt$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du \qquad (u = e^{2t})$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,sec} u + C$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,sec}(e^{2t}) + C$

d) $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{t-1}}\,dt = 2\int (u^2+1)^2\,du$

$(u = \sqrt{t-1} \Rightarrow t = u^2+1)$

$\displaystyle = 2\int (u^4+2u^2+1)\,du$

$\displaystyle = 2\frac{u^5}{5} + 4\frac{u^3}{3} + 2u + C$

$\displaystyle = \frac{2}{5}(t-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}} + 2(t-1)^{\frac{1}{2}} + C$

$\displaystyle = \frac{2\sqrt{(t-1)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(t-1)^3}}{3} + 2\sqrt{t-1} + C$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x\tan x}\,dx = \int \frac{x}{1+x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{x\cos x}{\cos x + x\sin x}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{1}{u}\,du \qquad (u = \cos x + x\sin x)$

$= \ln|u| + C$

$= \ln|\cos x + x\sin x| + C$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u}}{u^3+1}\,du = \int \frac{\sqrt{u}}{\left(u^{\frac{3}{2}}\right)^2+1}\,du$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\int \frac{1}{h^2+1}\,dh \qquad \left(h = u^{\frac{3}{2}}\right)$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\operatorname{Arc\,tan} h + C$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{u^3} + C$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{v+\sqrt{v}}\,dv = \int \frac{1}{\sqrt{v}\left(\sqrt{v}+1\right)}\,dv$

$\displaystyle = 2\int \frac{1}{u}\,du \qquad \left(u = \sqrt{v}+1\right)$

$= 2\ln|u| + C$

$= 2\ln\left(1+\sqrt{v}\right) + C$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$

$\displaystyle = 2\int \frac{x\sqrt{x}}{u}\,du \qquad \left(u = \sqrt{x}+1;\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)$

$\displaystyle = 2\int \frac{(u-1)^2(u-1)}{u}\,du \qquad (\sqrt{x} = u-1)$

$\displaystyle = 2\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du$

$\displaystyle = 2\int \left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)du$

$\displaystyle = 2\left(\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 3u - \ln|u|\right) + C$

$\displaystyle = 2\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{3} - \frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2} + 3\left(\sqrt{x}+1\right) - \ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right) + C$

i) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^5-2x^3}\,dx = \int x\sqrt[3]{x^2-2}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\,du \qquad (u = x^2-2)$

$\displaystyle = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + C$

$\displaystyle = \frac{3}{8}(x^2-2)^{\frac{4}{3}} + C$

$\displaystyle = \frac{3\sqrt[3]{(x^2-2)^4}}{8} + C$

2

j) 
$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{x^{11}-2x^9}\,dx &= \int x^3\sqrt[3]{x^2-2}\,dx\\ &= \int x^2\sqrt[3]{x^2-2}\,x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (u+2)\sqrt[3]{u}\,du \qquad (u = x^2-2)\\ &= \frac{1}{2}\int\left(u^{\frac{4}{3}}+2u^{\frac{1}{3}}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{2}u^{\frac{4}{3}}\right)+C\\ &= \frac{3}{14}(x^2-2)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(x^2-2)^{\frac{4}{3}}+C\\ &= \frac{3\sqrt[3]{(x^2-2)^7}}{14}+\frac{3\sqrt[3]{(x^2-2)^4}}{4}+C\end{aligned}$$

k) 
$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-\sin t}\,dt &= \int\sqrt{1-\sin t}\,\frac{\sqrt{1+\sin t}}{\sqrt{1+\sin t}}\,dt\\ &= \int\frac{\sqrt{\cos^2 t}}{\sqrt{1+\sin t}}\,dt\\ &= \int\frac{\pm\cos t}{\sqrt{1+\sin t}}\,dt\\ &= \pm\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du \qquad (u = 1+\sin t)\\ &= \pm 2\sqrt{u}+C\\ &= \pm 2\sqrt{1+\sin t}+C\end{aligned}$$

l) 
$$\begin{aligned}I &= \int\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\,d\varphi\\ &= \int\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,d\varphi\\ &= \int\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,d\varphi+\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,d\varphi\\ &= \int\csc^2\varphi\,d\varphi+\int\sec^2\varphi\,d\varphi\\ &= -\cot\varphi+\tan\varphi+C\end{aligned}$$

m) 
$$I = \int\frac{1}{\sin x-\cos x}\,dx$$

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) &= \cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\end{aligned}$$

$$\sin x-\cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx\\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\int\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx\\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\int\sec u\,du \qquad \left(u = x+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sec u+\tan u\right|+C\\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\end{aligned}$$

n) 
$$\begin{aligned}I &= \int\frac{\sin(\sec x)\sin x}{\cos^2(\sec x)\cos^2 x}\,dx\\ &= \int\frac{1}{\cos(\sec x)}\,\frac{\sin(\sec x)}{\cos(\sec x)}\,\frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= \int\sec(\sec x)\tan(\sec x)\sec x\tan x\,dx\\ &= \int\sec u\tan u\,du \qquad \left(u = \sec(\sec x)\right)\\ &= \sec u+C\\ &= \sec(\sec x)+C\end{aligned}$$

o) 
$$\begin{aligned}\int\frac{\ln(4x^{-3})}{x}\,dx &= \int\frac{\ln 4-3\ln x}{x}\,dx\\ &= \ln 4\int\frac{1}{x}\,dx-3\int\frac{\ln x}{x}\,dx\\ &= \ln 4\int\frac{1}{x}\,dx-3\int u\,du \qquad (u = \ln x)\\ &= \ln 4\ln|x|-3\frac{u^2}{2}+C\\ &= \ln 4x-\frac{3(\ln x)^2}{2}+C\end{aligned}$$

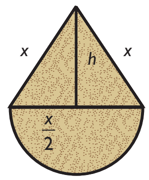
p) 
$$I = \int\frac{\sin\theta\cos\theta}{4-\sin\theta}\,d\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned}u &= 4-\sin\theta \Rightarrow \quad \sin\theta = 4-u\\ du &= -\cos\theta\,d\theta \Rightarrow \cos\theta\,d\theta = -du\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}I &= -\int\frac{(4-u)}{u}\,du\\ &= -\int\left(\frac{4}{u}-1\right)du\\ &= -\left(4\ln|u|-u\right)+C_1\\ &= u-4\ln|u|+C_1\\ &= 4-\sin\theta-4\ln|4-\sin\theta|+C_1\\ &= -\sin\theta-4\ln|4-\sin\theta|+C\end{aligned}$$

q) 
$$\begin{aligned}I &= \int\left[(x-2)(x+2)^2\right]^{\frac{-2}{3}}dx\\ &= \int\left[\frac{(x-2)}{(x+2)}(x+2)^3\right]^{\frac{-2}{3}}dx\\ &= \int\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{-2}{3}}\frac{1}{(x+2)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int u^{\frac{-2}{3}}\,du \qquad \left(u = \frac{x-2}{x+2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\,\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)}+C\\ &= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}+C\end{aligned}$$

**2.** a) Soit $x$, la mesure du diamètre.




$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = x^2$$

$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}, \text{ donc } h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

Soit $A$, l'aire totale.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \left(\frac{2\sqrt{3}+\pi}{8}\right)x^2$$

$$dA = A'(x)\,dx = \left(\frac{2\sqrt{3}+\pi}{4}\right)x\,dx$$

En remplaçant $x$ par 40 et $dx$ par $\pm 3\,\%(40) = \pm 1{,}2$, nous obtenons

$$dA = \left(\frac{2\sqrt{3}+\pi}{4}\right)(40)(\pm 1{,}2) = \pm 79{,}268\ldots$$

Puisque $E_a = |\Delta A|$ et que $\Delta A \approx dA$, nous avons $E_a \approx 79{,}27\text{ cm}^2$

b) $$E_r = \left|\frac{\Delta A}{A}\right| \approx \left|\frac{dA}{A}\right| = \left|\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}+\pi}{4}\right)x\,dx}{\left(\frac{2\sqrt{3}+\pi}{8}\right)x^2}\right| = \left|\frac{2\,dx}{x}\right|$$

$$E_r \leq 0{,}02$$

$$\left|\frac{2\,dx}{40}\right| \leq 0{,}02 \qquad (\text{car } x = 40)$$

$$|dx| \leq 0{,}02(20) = 0{,}4$$

d'où $dx = \pm 0{,}4$ cm

**3.** a) $$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = 4xy + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(4x+1)}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{4x+1}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int\left(\frac{4x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$\ln|y| = 2\ln(x^2+1) + \text{Arc tan}\,x + C$$

$$\ln|y| = \ln(x^2+1)^2 + \text{Arc tan}\,x + C$$

Déterminons l'équation de la courbe passant par $\text{P}\left(\frac{-\pi}{4}, 1\right)$.

$$\ln 1 = \ln\left(\frac{\pi^2}{16}+1\right)^2 + \text{Arc tan}\left(\frac{-\pi}{4}\right) + C$$

$$C = 1 - \ln\left(\frac{\pi^2+16}{16}\right)^2, \text{ ainsi}$$

$$\ln|y| = \ln(x^2+1)^2 + \text{Arc tan}\,x + 1 - \ln\left(\frac{\pi^2+16}{16}\right)^2$$

d'où $$y = \frac{256e}{(\pi^2+16)^2}(x^2+1)^2 e^{\text{Arc tan}\,x}$$

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^3}$$

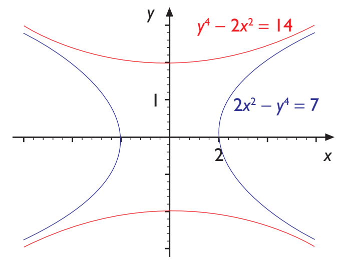
$$\int y^3\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y^4 - 2x^2 = C_1, \text{ où } C_1 = 2C$$

i) En remplaçant $x$ par -1 et $y$ par 2, nous obtenons
$16 - 2 = C_1$, donc $C_1 = 14$
d'où $y^4 - 2x^2 = 14$
$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \left]-\infty, -\sqrt[4]{14}\right] \cup \left[\sqrt[4]{14}, +\infty\right[$

ii) En remplaçant $x$ par 2 et $y$ par -1, nous obtenons
$1 - 8 = C_1$, donc $C_1 = -7$
d'où $2x^2 - y^4 = 7$
$x \in \left]-\infty, -\sqrt{3{,}5}\right] \cup \left[\sqrt{3{,}5}, +\infty\right[$ et $y \in \mathbb{R}$




**4.** a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^4}$$

$$y^4\,dy = x^2\,dx$$

$$\int y^4\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\frac{y^5}{5} = \frac{x^3}{3} + C$$

d'où $y_1 = \sqrt[5]{\frac{5x^3}{3} + C_1}$ ①

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^4}{x^2}$$

$$\left(\text{car le produit des pentes doit égaler -1, } \frac{x^2}{y^4}\left(\frac{-y^4}{x^2}\right) = -1\right)$$

$$\frac{dy}{y^4} = \frac{-dx}{x^2}$$

$$\int y^{-4}\,dy = -\int x^{-2}\,dx$$

$$\frac{-1}{3y^3} = \frac{1}{x} + k$$

$$\frac{1}{y^3} = C_2 - \frac{3}{x}$$

d'où $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{C_2 - \frac{3}{x}}}$ ②

c) En posant $x = 3$ et $y = 2$ respectivement dans ① et ②, nous trouvons $C_1 = -13$ et $C_2 = \frac{9}{8}$, d'où les courbes sont

$$y_1 = \sqrt[5]{\frac{5x^3}{3} - 13} \text{ et } y_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8} - \frac{3}{x}}}$$

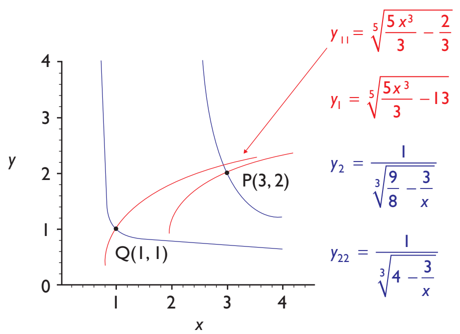
d) Trouvons une autre courbe de chacune des familles trouvées en a) et b).

En posant $x = 1$ et $y = 1$ respectivement dans ① et ②, nous trouvons $C_1 = \frac{-2}{3}$ et $C_2 = 4$

d'où $$y_{11} = \sqrt[5]{\frac{5x^3}{3} - \frac{2}{3}} \text{ et } y_{22} = \frac{1}{\sqrt[3]{4 - \frac{3}{x}}}$$

2

```
> with(plots):
> y1:=plot((5*(x^3/3)-13)^(1/5),x=0..4.5,y=0..4,
  color=orange):
> y2:=plot(1/((9/8)-(3/x))^(1/3),x=0..4,y=0..4,color=blue):
> y11:=plot((5*(x^3/3)-(2/3))^(1/5),x=0..3.5,y=0..4,
  color=orange):
> y22:=plot(1/(4-(3/x))^(1/3),x=0..4,y=0..4,color=blue):
> P:=plot([[3,2],[1,1]],style=point,symbol=circle,
  color=black):
> display(y1,y2,y11,y22,P,scaling=constrained);
```




**5.** a) $F_1 = \left\{y_1 \,\middle|\, y_1 = (x-k)^3\right\}$

$$m = \frac{dy}{dx} = 3(x-k)^2$$

$$m_1 = \frac{-1}{3(x-k)^2} \qquad (\text{car } mm_1 = -1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{3(x-k)^2}$$

$$\int dy = \frac{-1}{3}\int \frac{1}{(x-k)^2}\,dx$$

$$y = \frac{1}{3(x-k)} + C$$

d'où $F_2 = \left\{y_2 \,\middle|\, y_2 = \dfrac{1}{3(x-k)} + C\right\}$

b) i) P(1, -1) ; en remplaçant $x$ par 1 et $y$ par -1, dans $F_1$ et $F_2$

$-1 = (1-k)^3$, donc $k = 2$, d'où $y_{11} = (x-2)^3$

$-1 = \dfrac{1}{3(1-2)} + C$, donc $C = \dfrac{-2}{3}$,

d'où $y_{21} = \dfrac{1}{3(x-2)} - \dfrac{2}{3}$

ii) Q(0, 1) ; en remplaçant $x$ par 0 et $y$ par 1, dans $F_1$ et $F_2$

$1 = (0-k)^3$, donc $k = -1$, d'où $y_{12} = (x+1)^3$

$1 = \dfrac{1}{3(0+1)} + C$, donc $C = \dfrac{2}{3}$,

d'où $y_{22} = \dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{2}{3}$

iii) R(1, 0) ; en remplaçant $x$ par 1 et $y$ par 0, dans $F_1$ et $F_2$, nous obtenons

$0 = (1-k)^3$, donc $k = 1$, d'où $y_{13} = (x-1)^3$

$\dfrac{1}{3(x-1)} + C$ n'est pas définie en $x = 1$,

d'où $y_{23}$ n'est pas définie.

c)
```
> f11:=x->(x-2)^3;g11:=x->1/(3*(x-2))-2/3;
```

$$f11 := x \to (x-2)^3$$

$$g11 := x \to \frac{1}{3x-6} - \frac{2}{3}$$

```
> f12:=x->(x+1)^3;g12:=x->1/(3*(x+1))+2/3;
```

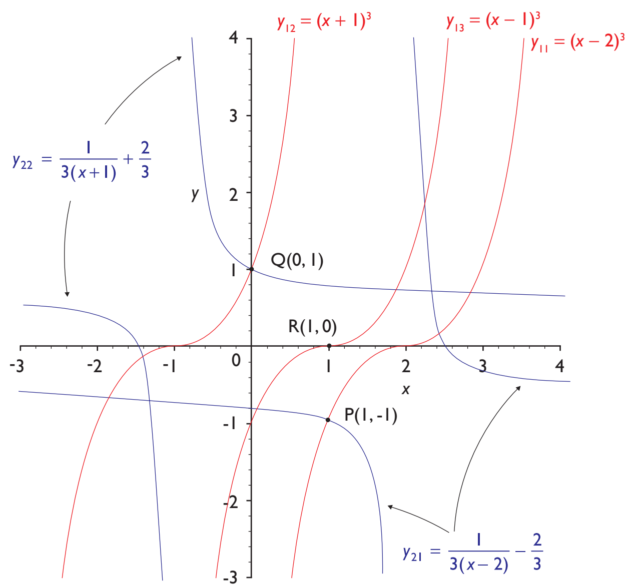
$$f12 := x \to (x+1)^3$$

$$g12 := x \to \frac{1}{3x+3} + \frac{2}{3}$$

```
> f13:=x->(x-1)^3;
```

$$f13 := x \to (x-1)^3$$

```
> with(plots):
> y11:=plot(f11(x),x=-3..4,y=-3..4,color=orange):
> y21:=plot(g11(x),x=-3..4,y=-3..4,color=blue,
  discont=true):
> y12:=plot(f12(x),x=-3..4,y=-3..4,color=orange):
> y22:=plot(g12(x),x=-3..4,y=-3..4,color=blue,
  discont=true):
> y13:=plot(f13(x),x=-3..4,y=-3..4,color=orange):
> P:=plot([[1,-1],[0,1],[1,0]],style=point,symbol=circle,
  color=black):
> display(y11,y12,y21,y22,y13,P,scaling=constrained);
```




**6.** a)

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2\left(\frac{\pi x}{100}\right)$$

$$\int \sec^2\left(\frac{\pi x}{100}\right)dx = \int dt$$

$$\frac{100}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{100}\right) = t + C$$

En posant $t = 0$ et $x = 0$, nous obtenons $C = 0$.

Ainsi $\dfrac{100}{\pi}\tan\left(\dfrac{\pi x}{100}\right) = t$ ①

En posant $x = 25$, nous trouvons $t = 31{,}830\ldots$, d'où environ 31,83 secondes.

b) En isolant $x$ dans ①, nous trouvons

$$x = \frac{100}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\pi t}{100}\right) \quad ②$$

i) En posant $t = 3600$ secondes, nous trouvons 49,718 5…, d'où environ 49,719 mètres.

ii) En posant $t = 86\,400$ secondes, nous trouvons 49,988 2…, d'où environ 49,988 mètres.

c) $t = \lim\limits_{x\to 50^-}\left[\frac{100}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{100}\right)\right] = +\infty$

d'où un temps infini.

d) $$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{100}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\pi t}{100}\right)\right] \quad (\text{de } ②) \\ &= \frac{100}{\pi}\left[\frac{\frac{\pi}{100}}{1+\left(\frac{\pi t}{100}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

d'où $v = \dfrac{10\,000}{10\,000 + \pi^2 t^2}$ (en m/s)

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{10\,000}{10\,000+\pi^2 t^2}\right] \end{aligned}$$

d'où $a = \dfrac{-20\,000\pi^2 t}{(10\,000+\pi^2 t^2)^2}$ (en m/s²)

**7.** $$\begin{aligned} a &= -8 \\ \frac{dv}{dt} &= -8 \\ dv &= -8\,dt \\ \int dv &= \int (-8)\,dt \\ v &= -8t + C_1 \end{aligned}$$

À $t = 0$, $v = v_0$ (vitesse à déterminer)

$v(t) = -8t + v_0$ ①

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -8t + v_0 \\ dx &= (-8t + v_0)\,dt \\ \int dx &= \int (-8t+v_0)\,dt \\ x &= -4t^2 + v_0 t + C_2 \end{aligned}$$

À $t = 0$, $x = 0$

$x = -4t^2 + v_0 t$ ②

Soit $t_A$, le temps nécessaire pour que l'automobile s'arrête.

de ① $v(t_A) = -8t_A + v_0 = 0$

$v_0 = 8t_A$ ③

de ② $x(t_A) = -4t_A^2 + v_0 t_A = 32$

donc $$\begin{aligned} \frac{-4v_0^2}{64} + \frac{v_0 v_0}{8} &= 32 \quad (\text{par } ③) \\ \frac{v_0^2}{16} &= 32 \\ v_0^2 &= 16(32) \\ v_0 &= 16\sqrt{2}\ \text{m/s} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{1000}\cdot 3600\ \text{km/h} \\ &\approx 81{,}458\ldots\ \text{km/h} \end{aligned}$$

d'où environ 81,5 km/h.

**8.** Soit $a$, l'accélération du mobile (en m/s²) et $t$, le temps (en secondes).

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a \\ dv &= k\,dt \quad (\text{car } a = k, \text{ constante}) \\ v &= kt + C \end{aligned}$$

En posant $t = 0$ et $v = 0$, nous obtenons $C = 0$, donc $v = kt$ ①

Puisque $$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ dx &= v\,dt \\ dx &= kt\,dt \quad (\text{car } v = kt) \\ x &= \frac{kt^2}{2} + C_1 \end{aligned}$$

En posant $t = 0$ et $x = 0$, nous obtenons $C_1 = 0$,

donc $x = \dfrac{kt^2}{2}$ ②

De ①, $k = \dfrac{v}{t}$ et en remplaçant dans ②, nous obtenons

$x = \dfrac{vt^2}{t2}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{vt}{2}$ ③

En posant $x = 400$ m et $v = 66{,}\overline{6}$ m/s dans ③, nous obtenons $t = 12$ secondes, d'où la durée de la course est 12 secondes.

En posant $t = 12$ et $v = 66{,}\overline{6}$ m/s dans ①, nous obtenons $k = 5{,}\overline{5}$, d'où l'accélération égale $5{,}\overline{5}$ m/s².

**9.** Soit $k$, l'accélération du mobile (en m/s²) et $t$, le temps (en secondes).

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a \\ dv &= k\,dt \quad (\text{car } a = k, \text{ constante}) \\ v &= kt + C \end{aligned}$$

En posant $t = 0$ et $v = 25$ m/s, nous obtenons $C = 25$, donc $v = kt + 25$ ①

Puisque $$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ dx &= (kt+25)\,dt \\ x &= \frac{kt^2}{2} + 25t + C_1 \end{aligned}$$

En posant $t = 0$ et $x = 0$, nous obtenons $C_1 = 0$,

donc $x = \dfrac{kt^2}{2} + 25t$ ②

2

De ①, $k = \dfrac{v - 25}{t}$ et en remplaçant dans ②,

nous obtenons

$$x = \left(\frac{v-25}{t}\right)\frac{t^2}{2} + 25t, \text{ c'est-à-dire}$$

$$x = \frac{(v-25)t}{2} + 25t$$

$$x = \frac{v + 25t}{2} \quad ③$$

En posant $x = 50$ et $v = 0$ dans ③, nous obtenons

$50 = \dfrac{25t}{2}$, donc $t = 4$,

d'où le temps requis pour s'arrêter est 4 secondes.

En posant $t = 4$ et $v = 0$ dans ①, nous obtenons $k = -6{,}25$,

d'où la décélération est égale à 6,25 m/s$^2$.

**10.** a) Soit $T$, la température en degrés kelvin et $t$, le temps en heures.

$$\frac{dT}{dt} = kT^4$$

$$\int \frac{1}{T^4}\,dT = \int k\,dt$$

$$\frac{-1}{3T^3} = kt + C$$

En posant $t = 0$ et $T = 293$, nous obtenons

$C = \dfrac{-1}{3(293)^3}$, ainsi $\dfrac{-1}{3T^3} = kt - \dfrac{1}{3(293)^3}$

En posant $t = 2$ et $T = 282$,

$$\frac{-1}{3(282)^3} = k2 - \frac{1}{3(293)^3}, \text{ ainsi } k = \frac{\dfrac{1}{3(293)^3} - \dfrac{1}{3(282)^3}}{2}$$

$$\frac{-1}{3T^3} = \left[\frac{\dfrac{1}{3(293)^3} - \dfrac{1}{3(282)^3}}{2}\right]t - \frac{1}{3(293)^3}$$

$$\frac{1}{T^3} = \left[\frac{1}{(282)^3} - \frac{1}{(293)^3}\right]\frac{t}{2} + \frac{1}{(293)^3}$$

$$\text{d'où } T = \frac{1}{\sqrt[3]{\left[\dfrac{1}{(282)^3} - \dfrac{1}{(293)^3}\right]\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{(293)^3}}}$$

b) En posant $t = 6$, nous trouvons $T \approx 264{,}14$ K.

**11.** Soit $Q$, la quantité du produit (en ml) et $t$, le temps (en h).

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

$$\frac{dQ}{Q} = k\,dt$$

$$\ln Q = kt + C$$

En posant $t = 0$ et $Q = Q_0$, nous obtenons $C = \ln Q_0$.

Ainsi $\ln Q = kt + \ln Q_0$

Puisque la demi-vie est de 3 heures, en posant $t = 3$ et

$Q = \dfrac{Q_0}{2}$, nous obtenons $\ln \dfrac{Q_0}{2} = k3 + \ln Q_0$

$$\text{Ainsi} \quad k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3}$$

$$\text{donc } \ln Q = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3}t + \ln Q_0$$

Déterminons d'abord la quantité $Q$ minimale nécessaire pour qu'un chat de 5,5 kg reste endormi.

$Q = 18$ ml/kg $\times$ 5,5 kg $= 99$ ml

Déterminons maintenant la dose initiale $Q_0$ nécessaire pour assurer que $Q$ soit au moins de 99 ml.

$$\ln 99 = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3}\left(\frac{3}{4}\right) + \ln Q_0$$

d'où $Q_0 \approx 117{,}73$ ml

**12.** a) $A = 1000\left(1 + \dfrac{0{,}06}{1}\right)^{5\times 1}$

$\approx 1338{,}23$ \$

b) $A = 1000\left(1 + \dfrac{0{,}06}{2}\right)^{5\times 2}$

$\approx 1343{,}92$ \$

c) $A = 1000\left(1 + \dfrac{0{,}06}{12}\right)^{5\times 12}$

$\approx 1348{,}85$ \$

d) $A = 1000\left(1 + \dfrac{0{,}06}{365}\right)^{5\times 365}$

$\approx 1349{,}82$ \$

e) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} 1000\left(1 + \dfrac{0{,}06}{x}\right)^{5x}$ (ind. $1^{+\infty}$)

$A = 1000 \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{0{,}06}{x}\right)^{5x}$

où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{0{,}06}{x}\right)^{5x}$ est une indétermination de la forme $1^{+\infty}$.

Soit $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{0{,}06}{x}\right)^{5x}$

$$\ln B = \ln \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{0{,}06}{x}\right)^{5x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{0{,}06}{x}\right)^{5x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 5x \ln\left(1 + \frac{0{,}06}{x}\right) \quad (\text{ind. } (+\infty)\cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5\ln\left(1 + \dfrac{0{,}06}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{5}{\left(1 + \dfrac{0{,}06}{x}\right)}\left(\dfrac{-0{,}06}{x^2}\right)}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{0{,}3}{\left(1 + \dfrac{0{,}06}{x}\right)}$$

$$= 0{,}3$$

$$B = e^{0{,}3}$$

d'où $A = 1000e^{0{,}3} \approx 1349{,}86$ \$

f) $\dfrac{dA}{dt} = 0{,}06A$

$\dfrac{dA}{A} = 0{,}06\,dt$

$\displaystyle\int \frac{1}{A}\,dA = \int 0{,}06\,dt$

$\ln A = 0{,}06t + C$

En posant $t = 0$ et $A = A_0 = 1000$, nous obtenons

$\ln 1000 = 0{,}06(0) + C$, donc $C = \ln 1000$

Ainsi $\ln A = 0{,}06t + \ln 1000$

$A = 1000e^{0{,}06t}$

$A(5) = 1000e^{0{,}06\times 5} \approx 1349{,}86$ \$

g) Ils sont identiques.

**13.** a) Du numéro 12, nous avons

$A = A_0\left(1 + \dfrac{j}{x}\right)^{xt}$ où $t$ est le nombre d'années,

et $x$ est le nombre de capitalisations.

Si $x = 1$, c'est-à-dire que le capital est capitalisé annuellement, au taux $i$, nous obtenons

$A_1 = A_0(1 + i)^t$ ①

Si $x \to +\infty$, c'est-à-dire que le capital est capitalisé continuellement, au taux $j$, nous obtenons

$$A_2 = A_0 \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{j}{x}\right)^{xt}$$

Soit $B = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{j}{x}\right)^{xt}$ (ind. $1^{+\infty}$)

$$\ln B = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{j}{x}\right)^{xt}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{j}{x}\right)^{xt}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[xt\ln\left(1 + \frac{j}{x}\right)\right] \quad (\text{ind. } (+\infty)\cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{t\ln\left(1 + \frac{j}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{t\left(\dfrac{-j}{x^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{j}{x}\right)}}{\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{jt}{\left(1 + \frac{j}{x}\right)}$$

$\ln B = jt$

donc $B = e^{jt}$

De $A_2 = A_0 \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{j}{x}\right)^{xt}$, nous avons

$A_2 = A_0e^{jt}$ ②

Les montants d'intérêts sont les mêmes si $A_1 = A_2$.

De ① et ②, nous obtenons

$A_0(1 + i)^t = A_0e^{jt}$

$1 + i = e^j$

d'où $i = e^j - 1$ ③

b) En posant $j = 0{,}0725$ dans ③,

nous obtenons $i = 0{,}075\,19\ldots$

d'où $i \approx 7{,}52$ %

**14.** a) Soit $V$, le volume du cube (en cm$^3$), $x$ la longueur de l'arête du cube (en cm) et $t$ le temps (en min).

Nous avons $\dfrac{dV}{dt} = k(6x^2)$

or $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ (notation de Leibniz)

Ainsi $k6x^2 = 3x^2\dfrac{dx}{dt}$ $\left(\text{car } V = x^3 \text{ et } \dfrac{dV}{dx} = 3x^2\right)$

$2k\,dt = dx$

$\int dx = 2k\int dt$

$x = 2kt + C$

En posant $t = 0$ et $x = 3$, nous obtenons $C = 3$.

Ainsi $x = 2kt + 3$

En posant $t = 5$ et $x = 2$, nous obtenons $k = \dfrac{-1}{10}$.

Ainsi $x = -0{,}2t + 3$

En posant $t = 7$, nous obtenons $x = 1{,}6$,

d'où $V(1{,}6) = (1{,}6)^3 = 4{,}096$ cm$^3$.

b) Lorsque le cube est fondu, nous avons $x = 0$.

Ainsi $0 = -0{,}2t + 3$

d'où $t = 15$ minutes

**15.** $\dfrac{dT}{dt} = K(T - A)$

$\dfrac{dT}{T - A} = K\,dt$

$\ln|T - A| = Kt + C$

En posant $t = 0$ et $T = T_0$, nous obtenons

$\ln|T_0 - A| = C$

donc $\ln|T - A| = Kt + \ln|T_0 - A|$

$Kt = \ln|T - A| - \ln|T_0 - A|$

$= \ln\left|\dfrac{T - A}{T_0 - A}\right|$

$= \ln\left(\dfrac{T - A}{T_0 - A}\right)$ $\left(\text{car } \dfrac{T - A}{T_0 - A} > 0\right)$

Ainsi $e^{Kt} = \dfrac{T - A}{T_0 - A}$

$(T_0 - A)e^{Kt} = T - A$

d'où $T = A + (T_0 - A)e^{Kt}$

**16.** Du numéro 15, nous avons

$T = A + (T_0 - A)e^{Kt}$

Ainsi $T = 22 + (T_0 - 22)e^{-0{,}02t}$, où $T_0$ est la température initiale du café dans chacun des cas.

Pour Lyne, calculons d'abord la température initiale $T_0$ de son café.

$$T_0 = \frac{85° \times 250 + 4° \times 10}{260} = 81{,}884\ldots°$$

Après 6 minutes, la température $T_L$ du café de Lyne est

$$T_L = 22 + (81{,}884\ldots - 22)e^{-0{,}02\times 6} = 75{,}112\ldots°$$

donc $T_L \approx 75{,}11°$

Pour Johanne, après 6 minutes, son café est la température $T_1$.

$T_1 = 22 + (85 - 22)e^{-0{,}02\times 6} = 77{,}875\ldots°$

En ajoutant du lait, la température $T_J$ du café de Johanne est

$$T_J = \frac{(77{,}875\ldots°)\times 250 + 4°\times 10}{260} = 75{,}034\ldots°$$

donc $T_J \approx 75{,}03°$

Le café de Lyne, à environ 75,11 °C, sera donc plus chaud que celui de Johanne, à environ 75,03 °C.

**17.** $\dfrac{dT}{dL} = \dfrac{T}{2L}$

$$\frac{dT}{T} = \frac{dL}{2L}$$

$$\int \frac{1}{T}\,dT = \frac{1}{2}\int \frac{1}{L}\,dL$$

$$\ln|T| = \frac{1}{2}\ln|L| + C$$

$$\ln T = \ln\sqrt{L} + C \qquad (\text{car } T > 0 \text{ et } L > 0)$$

En posant $L = 1$ et $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}$

$$\ln\frac{2\pi}{\sqrt{g}} = \ln 1 + C, \text{ donc } C = \ln\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Ainsi $\ln T = \ln\sqrt{L} + \ln\dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}$

d'où $T = \dfrac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$

**18.** a) Isolons $P$.

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right) = \frac{nRT}{(V - nb)}$$

$$P = \frac{nRT}{(V - nb)} - \frac{an^2}{V^2}$$

$$dP = \left(\frac{nRT}{(V - nb)} - \frac{an^2}{V^2}\right)' dV$$

$$dP = \left(\frac{-nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}\right)dV$$

b) $dP = \left(\dfrac{nRT}{(V - nb)} - \dfrac{an^2}{V^2}\right)' dT$

$$dP = \frac{nR}{V - nb}\,dT$$

c) Isolons $T$.

$$T = \frac{1}{nR}\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb)$$

$$dT = \left[\frac{1}{nR}\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb)\right]' dV$$

$$= \frac{1}{nR}\left[PV - Pnb + \frac{an^2}{V} - \frac{an^3b}{V^2}\right]dV$$

$$= \frac{1}{nR}\left[P - \frac{an^2}{V^2} + \frac{2an^3b}{V^3}\right]dV$$

**19.** a) $\dfrac{dv}{dm} = \dfrac{-u_0}{m}$

$$dv = \frac{-u_0}{m}\,dm$$

$$\int dv = \int \frac{-u_0}{m}\,dm$$

$$v = -u_0 \ln m + C$$

Puisque $m = m_0$ lorsque $v = v_0$, alors

$$v_0 = -u_0 \ln m_0 + C$$

$$v_0 + u_0 \ln m_0 = C$$

Donc $v = -u_0 \ln m + v_0 + u_0 \ln m_0$ ①

$$v = v_0 + u_0 \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

b) En isolant $m$ de ①, nous obtenons

$$\ln m = \frac{v_0 - v + u_0 \ln m_0}{u_0}$$

$$m = e^{\frac{v_0 - v + u_0 \ln m_0}{u_0}}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} e^{\frac{v_0 - v + u_0 \ln m_0}{u_0}} = 0$

alors $m \to 0$

**20.** a) Soit $V$, le volume de monoxyde de carbone (en m³) et $t$, le temps (en min).

Entrée de monoxyde : $0{,}05 \times 0{,}8\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{min}} = \dfrac{1}{25}\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{min}}$

Sortie de monoxyde : $\dfrac{V}{120} \times 0{,}8\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{min}} = \dfrac{V}{150}\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{min}}$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{1}{25} - \frac{V}{150}\right) = \frac{6 - V}{150}$$

$$\frac{dV}{6 - V} = \frac{dt}{150}$$

$$-\ln|6 - V| = \frac{t}{150} + C$$

En posant $t = 0$ et $V = 0$, nous obtenons $C = -\ln 6$

Ainsi $-\ln|6 - V| = \dfrac{t}{150} - \ln 6$

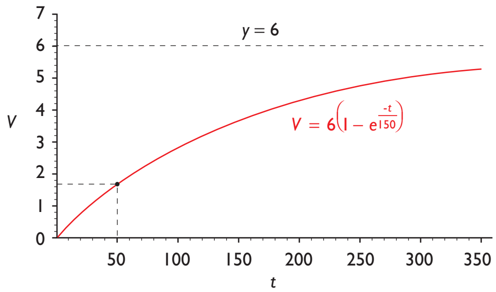
$$\ln(6 - V) = \frac{-t}{150} + \ln 6$$

d'où $V = 6\left(1 - e^{\frac{-t}{150}}\right)$

b) En posant $V = 0{,}014 \times 120 = 1{,}68$ m³,

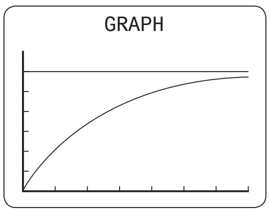
nous obtenons $1{,}68 = 6\left(1 - e^{\frac{-t}{150}}\right)$, d'où $t \approx 49{,}3$ min.

c)
```
> with(plots):
> V:=t->6*(1-exp(-t/150));
                    V := t → 6 – 6e^(-1/150 t)
> t0:=fsolve(V(t)=1.68);
                    t0 := 49.27561005
> c1:=plot(V(t),t=0..360,V=0..7,color=orange):
> y:=plot(6,t=0..360,linestyle=4,color=black):
> y1:=plot(V(t0),t=0..t0,linestyle=4,color=black):
> t1:=plot([t0,V,V=0..V(t0)],linestyle=4,color=black):
> P:=plot([[t0,V(t0)]],style=point,symbol=circle,
  color=orange):
> display(c1,y,y1,t1,P);
```




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■6(1-e^(-X/150))
\Y2■6
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=350
Xscl=50
Ymin=0
Ymax=7
Yscl=1
Xres=1
```




**21.** a) Soit $Q$, la quantité de médicament (en mg) et $t$, le temps (en heures).

$$\frac{dQ}{dt} = m - KQ, \text{ où } K > 0$$

$$\int \frac{1}{m - KQ}\,dQ = \int dt$$

$$\frac{-1}{K}\ln|m - KQ| = t + C$$

En remplaçant $t$ par 0 et $Q$ par 0, nous obtenons

$$\frac{-1}{K}\ln m = C, \text{ ainsi}$$

$$\frac{-1}{K}\ln(m - KQ) = t - \frac{1}{K}\ln m \qquad (\text{car } (m - KQ) > 0)$$

$$\ln(m - KQ) = -Kt + \ln m$$

$$m - KQ = me^{-Kt}$$

$$KQ = m - me^{-Kt}$$

$$\text{d'où } Q = \frac{m}{K}(1 - e^{-Kt}) \qquad ①$$

b) $$M = \lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{m}{K}(1 - e^{-Kt}) = \frac{m}{K}(1 - 0) \quad (\text{car } K > 0) = \frac{m}{K}$$

c) i) En remplaçant $m$ par 3, $t$ par 1 et $Q$ par 2,45 dans ①, nous obtenons

$$2{,}45 = \frac{3}{K}(1 - e^{-K})$$

```
> K:=fsolve(2.45=(3/K)*(1-exp(-K)));
                K := 0.4197065019
```

ii) $$Q(t) \approx \frac{3}{0{,}4197}(1 - e^{-0{,}4197t})$$

$$Q(2) \approx \frac{3}{0{,}4197}(1 - e^{-0{,}4197(2)}) \approx 4{,}060\ldots$$

d'où $Q(2) \approx 4{,}06$ mg

iii) $$Q(4) \approx \frac{3}{0{,}4197}(1 - e^{-0{,}4197(4)}) \approx 5{,}814\ldots$$

d'où $Q(4) \approx 5{,}81$ mg

d) En remplaçant $M$ par 5 et $K$ par 0,419 7…

dans $M = \dfrac{m}{K}$, nous obtenons

$$5 \approx \frac{m}{0{,}419\,7\ldots}$$

$$m \approx 2{,}098\,5\ldots$$

d'où $m \approx 2{,}1$ mg/h

**22.** a) $$a = k(60 - x)$$

$$\frac{dv}{dt} = k(60 - x) \qquad \left(\text{car } a = \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = k(60 - x)$$

$$\frac{dv}{dx}v = k(60 - x) \qquad \left(\text{car } \frac{dx}{dt} = v\right)$$

$$v\,dv = k(60 - x)\,dx$$

$$\int v\,dv = k\int (60 - x)\,dx$$

$$\frac{v^2}{2} = k\left(60x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

$$v^2 = k(120x - x^2) + C, \text{ où } C = 2C_1$$

En remplaçant $v$ par 0 et $x$ par 20 (ou 100), nous obtenons

$$\left.\begin{array}{l} 0 = k(2400 - 400) + C \\ 0 = k(12\,000 - 10\,000) + C \end{array}\right\} \text{donc } 2000k + C = 0 \quad ①$$

En remplaçant $v$ par 10 et $x$ par 40, nous obtenons

$$10^2 = k(4800 - 1600) + C, \text{ donc } 3200k + C = 100 \quad ②$$

En résolvant le système d'équations ① et ②, nous trouvons

$$k = \frac{1}{12} \text{ et } C = \frac{-500}{3}$$

$$\text{donc } v^2 = \frac{1}{12}(120x - x^2) - \frac{500}{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{12}(120x - x^2) - \frac{500}{3}}$$

i) En remplaçant $x$ par 50

$$v^2\big|_{x=50} = \frac{1}{12}\left(120(50) - (50)^2\right) - \frac{500}{3} = 125$$

d'où $v(50) \approx 11{,}18$ cm/s

ii) En remplaçant $x$ par 90

$$v^2\big|_{x=90} = \frac{1}{12}\left(120(90) - (90)^2\right) - \frac{500}{3} = 58{,}\bar{3}$$

d'où $v(90) \approx 7{,}64$ cm/s

b) Déterminons d'abord $x$ tel que $a = 0$.

$$a = 0$$

$$\frac{1}{12}(60 - x) = 0, \text{ ainsi } x = 60$$

2

Puisque $a$ passe du + au − lorsque $x$ passe de $60^-$ à $60^+$, $v$ est maximal lorsque $x = 60$.

$$v^2\big|_{x=60} = \frac{1}{12}\left(120(60) - (60)^2\right) - \frac{500}{3} = 133{,}\bar{3}$$

d'où $v_{\max} = v(60) \approx 11{,}547$ cm/s

**23.** a)
$$v = 9(1 - 0{,}03x)^{0,2}$$
$$\frac{dx}{dt} = 9(1 - 0{,}03x)^{0,2} \qquad \left(\text{car } v = \frac{dx}{dt}\right)$$
$$\int \frac{1}{(1 - 0{,}03x)^{0,2}} = 9\int dt$$
$$\frac{(1 - 0{,}03x)^{0,8}}{-(0{,}03)(0{,}8)} = 9t + C$$
$$(1 - 0{,}03x)^{0,8} = -0{,}216t + C_1, \text{ où } C_1 = -0{,}024C$$

En remplaçant $x$ par 0 et $t$ par 0, nous obtenons $1 = C_1$

donc $(1 - 0{,}03x)^{0,8} = -0{,}216t + 1$
$$(1 - 0{,}03x) = (1 - 0{,}216t)^{\frac{5}{4}}$$
$$x = \frac{1 - \sqrt[4]{(1 - 0{,}216t)^5}}{0{,}03} \quad ①$$

d'où $x(1) \approx 8{,}7$ km, et $x(2) \approx 16{,}9$ km

b)
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{d}{dx}\left(9(1 - 0{,}03x)^{0,2}\right)v \qquad \left(\text{car } \frac{dx}{dt} = v\right)$$
$$= 9(0{,}2)(-0{,}03)(1 - 0{,}03x)^{-0,8}\left[9(1 - 0{,}03x)^{0,2}\right]$$
$$= \frac{-0{,}486}{(1 - 0{,}03x)^{0,6}}$$

donc $a(x) = \dfrac{-0{,}486}{\sqrt[5]{(1 - 0{,}03x)^3}}$

En remplaçant $t$ par 3 dans ①, nous obtenons $x = 24{,}295\ 6...$

d'où $a\big|_{t=3} = a(24{,}295\ 6\ldots) \approx -1{,}06$ km/h²

c) En remplaçant $x$ par $\left(\dfrac{42{,}195}{2}\right)$ dans
$$(1 - 0{,}03x)^{0,8} = -0{,}216t + 1, \text{ nous obtenons}$$
$$\left(1 - 0{,}03\left(\frac{42{,}195}{2}\right)\right)^{0,8} = -0{,}216t + 1$$
$$0{,}216t = 0{,}551\ 4\ldots$$
$$t = 2{,}553\ldots$$

d'où $t \approx 2$ heures 33 minutes

**24.** a) $R_m(q) = \dfrac{31 - q}{\sqrt{36 - q}}$
$$\frac{dR}{dq} = \frac{31 - q}{\sqrt{36 - q}}$$
$$\int dR = \int \frac{31 - q}{\sqrt{36 - q}}\,dq$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 36 - q \Rightarrow 31 - q = u - 5 \\ du &= -dq \quad \Rightarrow \quad dq = -du \end{aligned}}$$

$$R = -\int \frac{u - 5}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \int \frac{5}{u^{\frac{1}{2}}}\,du - \int u^{\frac{1}{2}}\,du$$
$$= 10u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + K$$
$$R = 10\sqrt{36 - q} - \frac{2\sqrt{(36 - q)^3}}{3} + K$$

En remplaçant $q$ par 0 et $R$ par 0, nous obtenons
$$0 = 10\sqrt{36} - \frac{2\sqrt{(36)^3}}{3} + K, \text{ donc } K = 84$$

d'où $R(q) = 10\sqrt{36 - q} - \dfrac{2\sqrt{(36 - q)^2}}{3} + 84$

$$C_m(q) = \frac{q^2 + q}{67}$$
$$\frac{dC}{dq} = \frac{1}{67}q^2 + \frac{1}{67}q$$
$$\int dC = \frac{1}{67}\int q^2\,dq + \frac{1}{67}\int q\,dq$$
$$C = \frac{1}{67}\frac{q^3}{3} + \frac{1}{67}\frac{q^2}{2} + K_1$$

En remplaçant $q$ par 0 et $C$ par 10, nous obtenons

$10 = 0 + K_1$, donc $K_1 = 10$

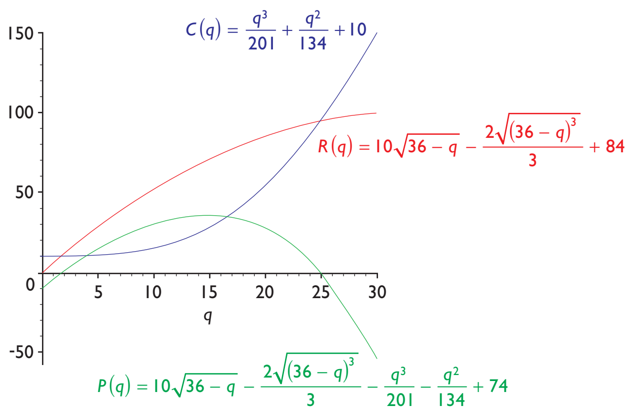
d'où $C(q) = \dfrac{q^3}{201} + \dfrac{q^2}{134} + 10$

Puisque $P = R - C$
$$P = \left(10\sqrt{36 - q} - \frac{2\sqrt{(36 - q)^3}}{3} + 84\right) - \left(\frac{q^3}{201} + \frac{q^2}{134} + 10\right)$$

d'où
$$P(q) = 10\sqrt{36 - q} - \frac{2\sqrt{(36 - q)^3}}{3} - \frac{q^3}{201} - \frac{q^2}{134} + 74$$

b) $P(1) = -4{,}893\ 5...$, d'où environ -4894 $ ;
$P(10) = 30{,}885\ 7...$, d'où environ 30 886 $ ;
$P(28) = -27{,}865\ 3...$, d'où environ -27 865 $.

c)
```
> R:=q->10*(36-q)^(1/2)-(2/3)*(36-q)^(3/2)+84;
```
$$R := q \to 10\sqrt{36 - q} - \frac{2}{3}(36 - q)^{(3/2)} + 84$$
```
> C:=q->q^3/201+q^2/134+10;
```
$$C := q \to \frac{1}{201}q^3 + \frac{1}{134}q^2 + 10$$
```
> P:=q->10*(36-q)^(1/2)-(2/3)*(36-q)^(3/2)+84
  -(q^3/201+q^2/134+10);
```
$$P := q \to 10\sqrt{36 - q} - \frac{2}{3}(36 - q)^{(3/2)} + 74 - \frac{1}{201}q^3 - \frac{1}{134}q^2$$
```
> with(plots):
> r:=plot(R(q),q=0..30,color=red):
> c:=plot(C(q),q=0..30,color=blue):
> p:=plot(P(q),q=0..30,color=green):
> display(r,c,p);
```




d) > q1:=fsolve(P(q)=0,q=0..3);q2:=fsolve(P(q)=0,q=22..26);

$$q1 := 1.985338442$$
$$q2 := 25.05604036$$

d'où $P(q) \geq 0$ si $q \in [2 \text{ bateaux}, 25 \text{ bateaux}]$

e) Le profit est maximal lorsque $R_m(q) = C_m(q)$

> Rm:=q->(31-q)/(36-q)^(1/2);

$$Rm := q \to \frac{31-q}{\sqrt{36-q}}$$

> Cm:=q->(q^2+q)/67;

$$Cm := q \to \frac{1}{67}q^2 + \frac{1}{67}q$$

> qmax:=fsolve(Rm(q)=Cm(q));

$$qmax := 14.84776757$$

Le profit est maximal lorsque $q = 14{,}847...$, or $q$ doit être un entier.

En calculant $P(14)$ et $P(15)$, nous obtenons

> P(14.);P(15.);

$$36.99696527$$
$$37.19954796$$

d'où le profit est maximal lorsque $q = 15$ et $P_{\max} = P(15) \approx 37\,200$ \$

**25.** a) $\frac{dp}{dq} = \frac{-400q}{\sqrt{(q^2+16)^3}}$

$$\int dp = -400\int \frac{q}{(q^2+16)^{\frac{3}{2}}}\,dq$$

$$p = \frac{400}{\sqrt{q^2+16}} + C$$

En remplaçant $q$ par 3 et $p$ par 95, nous obtenons

$$95 = \frac{400}{\sqrt{(3)^2+16}} + C, \text{ donc } C = 15$$

d'où $p(q) = \frac{400}{\sqrt{q^2+16}} + 15$

b) $p(4) = \frac{400}{\sqrt{32}} + 15 = 85{,}710\ldots$

d'où environ 85,71 \$

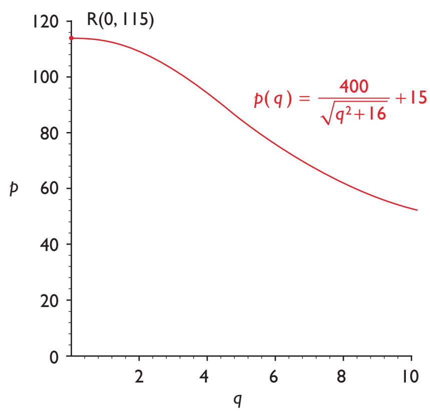
c)
$$p(q) \leq 70$$
$$\frac{400}{\sqrt{q^2+16}} + 15 \leq 70$$
$$\frac{400}{\sqrt{q^2+16}} \leq 55$$
$$\sqrt{q^2+16} \geq \frac{400}{55}$$
$$q^2 + 16 \geq \left(\frac{80}{11}\right)^2$$
$$q \geq \sqrt{\left(\frac{80}{11}\right)^2 - 16} = 6{,}073\ldots$$

d'où au moins 608 valises.

d) > p:=q->400/(q^2+16)^(1/2)+15;

$$p := q \to \frac{400}{\sqrt{q^2+16}} + 15$$

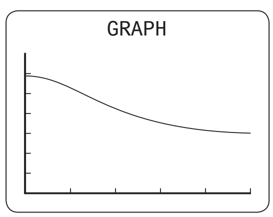
> plot(p(q),q=0..10,p=0..120,color=orange);




Lorsque le prix est de 115 \$, $q = 0$, ce qui signifie qu'au prix de 115 \$, il n'y a aucune demande d'achat de valises.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■15+(400/((16+X²)
^(1/2))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=10
Xscl=2
Ymin=0
Ymax=130
Yscl=20
Xres=1
```




**26.** Soit $h$, la hauteur de la neige accumulée (en cm), $s$, la distance déneigée (en km) et $t$, le temps (en h). Puisque la vitesse de déblayage est inversement proportionnelle à la hauteur de la neige $h$, nous allons d'abord déterminer $h$.

Déterminons $h$: $\frac{dh}{dt} = 7 \Rightarrow dh = 7\,dt$

$$\int dh = \int 7\,dt \Rightarrow h = 7t + C$$

À 7 h, considérons $t = 0$ et $A$, la hauteur de la neige accumulée.

$A = 0 + C$, ainsi $C = A$ d'où $h = 7t + A$

Équation différentielle : $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{k}{h} = \dfrac{k}{7t + A}$

$$ds = \frac{k}{7t + A}\,dt$$
$$\int ds = \int \frac{k}{7t + A}\,dt$$
$$s = \frac{k}{7}\ln(7t + A) + C$$

En posant $t = 0$ et $s = 0$, nous obtenons

$0 = \dfrac{k}{7}\ln(0 + A) + C$, donc $C = \dfrac{-k}{7}\ln A$

Ainsi $s = \dfrac{k}{7}\ln(7t + A) - \dfrac{k}{7}\ln A$

$$s = \frac{k}{7}[\ln(7t + A) - \ln A]$$
$$s = \frac{k}{7}\ln\left(\frac{7t + A}{A}\right)$$

À 9 h, en posant $t = 2$ et $s = 14$, nous obtenons

$$14 = \frac{k}{7}\ln\left(\frac{14 + A}{A}\right) \Rightarrow k = \frac{98}{\ln\left(\frac{14 + A}{A}\right)}$$

d'où $s = \dfrac{14}{\ln\left(\frac{14 + A}{A}\right)}\ln\left(\dfrac{7t + A}{A}\right)$

À 11 h, en posant $t = 4$ et $s = 21$, nous obtenons

$$21 = \frac{14}{\ln\left(\frac{14 + A}{A}\right)}\ln\left(\frac{28 + A}{A}\right)$$
$$3\ln\left(\frac{14 + A}{A}\right) = 2\ln\left(\frac{28 + A}{A}\right)$$
$$\ln\left(\frac{14 + A}{A}\right)^3 = \ln\left(\frac{28 + A}{A}\right)^2$$

Ainsi $\left(\dfrac{14 + A}{A}\right)^3 = \left(\dfrac{28 + A}{A}\right)^2$

$$\frac{(14 + A)^3}{A} = (28 + A)^2$$
$$(14 + A)^3 = A(28 + A)^2$$
$$2744 + 588A + 42A^2 + A^3 = 784A + 56A^2 + A^3$$
$$14A^2 + 196A - 2744 = 0$$
$$14(A^2 + 14A - 196) = 0$$

Ainsi $A = \dfrac{-14 \pm \sqrt{196 + 784}}{2}$

$$A \approx \frac{-14 \pm 31{,}30}{2}$$

La valeur négative doit être rejetée, d'où $A \approx 8{,}65$ cm, c'est-à-dire que lorsque le service de déblayage commence à nettoyer les rues à 7 h, il y avait déjà environ 8,65 cm de neige au sol.

Puisque la neige tombe à un taux constant de 7 cm/h, nous pouvons calculer depuis combien de temps $t_1$ il neige,

c'est-à-dire $t_1 \approx \dfrac{8{,}65 \text{ cm}}{7 \text{ cm/h}} \approx 1{,}24$ heure

Il a donc commencé à neiger environ 1 h 14 min avant 7 h, c'est-à-dire qu'il a commencé à neiger vers 5 h 46.

**27.**
$$E = L\frac{dI}{dt} + RI$$
$$L\frac{dI}{dt} = E - RI$$
$$\frac{L\,dI}{E - RI} = dt$$
$$\int \frac{L}{E - RI}\,dI = \int dt$$
$$\frac{-L}{R}\ln(E - RI) = t + C$$

Puisque à $t = 0$, $I = 0$, nous obtenons

$\dfrac{-L}{R}\ln E = C$, donc

$$\frac{-L}{R}\ln(E - RI) = t - \frac{L\ln E}{R}$$
$$\ln(E - RI) = \frac{-Rt}{L} + \ln E$$
$$E - RI = e^{\ln E - \frac{Rt}{L}}$$
$$= Ee^{\frac{-Rt}{L}}$$
$$RI = E - Ee^{\frac{-Rt}{L}}$$
$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

**28.** Soit $C$, le nombre de chevreuils présents, $L$, le nombre de loups présents et $t$, le temps.

a) $\dfrac{dC}{dt} = n_1C - m_1C - pCL$

d'où $\dfrac{dC}{dt} = (n_1 - m_1 - pL)C$ ①

$\dfrac{dL}{dt} = hLC - m_2L$

d'où $\dfrac{dL}{dt} = (hC - m_2)L$ ②

b) De ① $\dfrac{dC}{(n_1 - m_1 - pL)C} = dt$ ③

de ② $\dfrac{dL}{(hC - m_2)L} = dt$ ④

de ③ et ④

$$\frac{dC}{(n_1 - m_1 - pL)C} = \frac{dL}{(hC - m_2)L}$$

Ainsi $\dfrac{(hC - m_2)\,dC}{C} = \dfrac{(n_1 - m_1 - pL)\,dL}{L}$

$$\int\left(h - \frac{m_2}{C}\right)dC = \int\left(\frac{n_1 - m_1}{L} - p\right)dL$$
$$hC - m_2\ln C = (n_1 - m_1)\ln L - pL + K_1$$
$$e^{(hC - m_2\ln C)} = e^{(n_1 - m_1)\ln L - pL + K_1}$$
$$e^{hC} \cdot e^{-m_2\ln C} = e^{(n_1 - m_1)\ln L} \cdot e^{-pL}e^{K_1}$$
$$e^{hC} \cdot C^{-m_2} = L^{(n_1 - m_1)}e^{-pL}K$$
$$K = \frac{C^{-m_2}e^{hC}}{L^{(n_1 - m_1)}e^{-pL}}$$

d'où $K = (C^{-m_2}e^{hC})(L^{(m_1 - n_1)}e^{pL})$

c) La tangente à la courbe est horizontale lorsque $\dfrac{dL}{dC} = 0$.

Or $\dfrac{dL}{dC} = \dfrac{dL}{dt}\dfrac{dt}{dC}$ (notation de Leibniz)

Ainsi $\dfrac{dL}{dC} = 0$ lorsque $\dfrac{dL}{dt} = 0$

$(hC - m_2)L = 0$ (de ②)

c'est-à-dire lorsque $C = \dfrac{m_2}{h}$

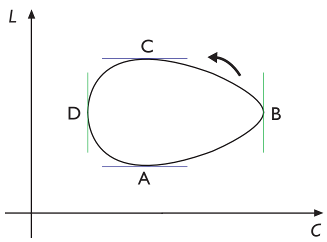
La tangente à la courbe est verticale lorsque $\dfrac{dC}{dL} = 0.$

Or $\dfrac{dC}{dL} = \dfrac{dC}{dt}\dfrac{dt}{dL}$ (notation de Leibniz)

Ainsi $\dfrac{dC}{dL} = 0$ lorsque $\dfrac{dC}{dt} = 0$

$(n_1 - m_1 - pL)C = 0$ (de ①)

c'est-à-dire lorsque $L = \dfrac{n_1 - m_1}{p}$

d) 


Du point A au point B.
Au point A, le nombre de loups est minimal ; il y a donc moins de prédateurs pour les chevreuils, donc leur nombre augmente. Lorsque le nombre de chevreuils augmente, il y a plus de nourriture pour les loups, donc leur nombre augmente.
Du point B au point C.
Au point B, le nombre de chevreuils est maximal ; il y a donc plus de nourriture pour les loups, donc leur nombre augmente. Lorsque le nombre de loups augmente, ils se nourrissent davantage de chevreuils, donc le nombre de chevreuils diminue.
Et ainsi de suite.

2