Solutionnaire
Exercices récapitulatifs

Chapitre 1 (page 51)

1. a)

$$\left(2x^4y^{\frac{7}{2}} - 5x^3y^4\right)' = (5)'$$

$$8x^3y^{\frac{7}{2}} + 2x^4\,\frac{7}{2}\,y^{\frac{5}{2}}y' - (15x^2y^4 + 5x^3 4y^3y') = 0$$

$$y'\left(7x^4y^{\frac{5}{2}} - 20x^3y^3\right) = 15x^2y^4 - 8x^3y^{\frac{7}{2}}$$

$$y' = \frac{15x^2y^4 - 8x^3y^{\frac{7}{2}}}{7x^4y^{\frac{5}{2}} - 20x^3y^3}$$

$$= \frac{x^2y^{\frac{7}{2}}\left(15y^{\frac{1}{2}} - 8x\right)}{x^3y^{\frac{5}{2}}\left(7x - 20y^{\frac{1}{2}}\right)}$$

d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\left(15\sqrt{y} - 8x\right)}{x\left(7x - 20\sqrt{y}\right)}$

b)

$$\frac{d}{d\theta}\cos(\theta\varphi^2) = \frac{d}{d\theta}\varphi$$

$$-\sin(\theta\varphi^2)\frac{d}{d\theta}(\theta\varphi^2) = \frac{d}{d\theta}\varphi$$

$$-\sin(\theta\varphi^2)\left[\varphi^2\frac{d}{d\theta}\theta + \theta\frac{d}{d\theta}\varphi^2\right] = \frac{d}{d\theta}\varphi$$

$$-\sin(\theta\varphi^2)\left[\varphi^2(1) + \theta 2\varphi\frac{d\varphi}{d\theta}\right] = \frac{d\varphi}{d\theta}$$

$$-\varphi^2\sin(\theta\varphi^2) - 2\theta\varphi\sin(\theta\varphi^2)\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\varphi}{d\theta}$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} + 2\theta\varphi\sin(\theta\varphi^2)\frac{d\varphi}{d\theta} = -\varphi^2\sin(\theta\varphi^2)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta}\left[1 + 2\theta\varphi\sin(\theta\varphi^2)\right] = -\varphi^2\sin(\theta\varphi^2)$$

d'où $\dfrac{d\varphi}{d\theta} = \dfrac{-\varphi^2\sin(\theta\varphi^2)}{1 + 2\theta\varphi\sin(\theta\varphi^2)}$

c) Déterminons d'abord $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\left(\sin(x^2 + y^2)\right)' = (2y + 5x)'$$

$$\left(\cos(x^2 + y^2)\right)(2x + 2yy') = 2y' + 5$$

$$2x\cos(x^2 + y^2) + 2yy'\cos(x^2 + y^2) = 2y' + 5$$

$$2yy'\cos(x^2 + y^2) - 2y' = 5 - 2x\cos(x^2 + y^2)$$

$$y'\left(2y\cos(x^2 + y^2) - 2\right) = 5 - 2x\cos(x^2 + y^2)$$

donc $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5 - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2}$

Ainsi $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,\,0)} = \dfrac{5 - 0}{0 - 2}$

d'où $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,\,0)} = \dfrac{-5}{2}$

d) Déterminons d'abord y'.

$$(e^y - e^{-x})' = (3xy^2)'$$

$$e^y y' + e^{-x} = 3y^2 + 6xyy'$$

$$e^y y' - 6xyy' = 3y^2 - e^{-x}$$

$$y'(e^y - 6xy) = 3y^2 - e^{-x}$$

$$y' = \frac{3y^2 - e^{-x}}{e^y - 6xy}$$

Calculons y''.

$$y'' = \frac{(6yy' + e^{-x})(e^y - 6xy) - (3y^2 - e^{-x})(e^y y' - 6y - 6xy')}{(e^y - 6xy)^2}$$

En calculant $y'|_{(0,0)}$, nous obtenons $y'|_{(0,0)} = -1$

Ainsi $y''|_{(0,0)} = \dfrac{(0 + 1)(1 - 0) - (-1)(-1)}{(1)^2} = 0$

d'où $y''|_{(0,0)} = 0$

e) Calculons d'abord y'.

$$(e^{2x}\ln y + \sin 3x(\cos y))' = (1)'$$

$$2e^{2x}\ln y + \frac{e^{2x}y'}{y} + 3\cos 3x\cos y - \sin 3x(\cos y)y' = 0$$

$$\frac{e^{2x}y'}{y} + \sin 3x\cos yy' = -2e^{2x}\ln y - 3\cos 3x\cos y$$

$$y'\left[\frac{e^{2x}}{y} + \sin 3x\cos y\right] = -2e^{2x}\ln y - 3\cos 3x\cos y$$

$$y' = \frac{-2e^{2x}\ln y - 3\cos 3x\cos y}{\dfrac{e^{2x}}{y} + \sin 3x\cos y}$$

$$y'|_{(0,\,e)} = \frac{-2 - 3\cos e}{\dfrac{1}{e} - 0}$$

d'où $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,\,e)} = -2e - 3e\cos e$

f) Déterminons d'abord $\dfrac{dy}{dx}$.

$$(y^2 - 2xy)' = (6x - 23)'$$

$$2yy' - 2y - 2xy' = 6$$

$$y'(2y - 2x) = 6 + 2y$$

$$y' = \frac{6 + 2y}{2y - 2x} = \frac{3 + y}{y - x}$$

Déterminons y lorsque $x = 3$. De l'équation initiale, nous avons, en remplaçant x par 3,

$$y^2 - 6y = 18 - 23$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$(y - 5)(y - 1) = 0$$

donc $y = 5$ ou $y = 1$

Déterminons $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$(yy' - y - xy')' = (3)'$$
$$y'y' + yy'' - y' - y' - xy'' = 0$$
$$y''(y - x) = 2y' - y'y'$$
$$y'' = \frac{2y' - y'y'}{y - x}$$

Calculons $y'\big|_{(3,\,1)}$.

$$y'\big|_{(3,\,1)} = \frac{3+1}{1-3} = -2$$

Calculons $y'\big|_{(3,\,5)}$.

$$y'\big|_{(3,\,5)} = \frac{3+5}{5-3} = 4$$

d'où $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{(3,\,1)} = \dfrac{2(-2) - (-2)(-2)}{1-3} = 4$

et $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{(3,\,5)} = \dfrac{2(4) - (4)(4)}{5-3} = -4$

2. a) $(x^2 + y^2 - 6x - 8y)' = (0)'$

$$2x + 2yy' - 6 - 8y' = 0$$
$$y'(2y - 8) = 6 - 2x$$
$$y' = \frac{3 - x}{y - 4}$$

La tangente est horizontale lorsque $y' = 0$.

Donc $3 - x = 0$

$x = 3$

En remplaçant x par 3, nous obtenons

$$3^2 + y^2 - 6(3) - 8y = 0$$
$$y^2 - 8y - 9 = 0$$
$$(y - 9)(y + 1) = 0$$

Ainsi $y = 9$ ou $y = -1$

d'où les points A(3, -1) et B(3, 9).

La tangente est verticale lorsque y' n'est pas définie.

Donc $y - 4 = 0$

$y = 4$

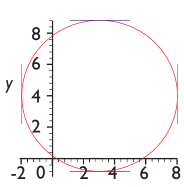
En remplaçant y par 4, nous obtenons

$$x^2 + 4^2 - 6x - 8(4) = 0$$
$$x^2 - 6x - 16 = 0$$
$$(x - 8)(x + 2) = 0$$

Ainsi $x = 8$ ou $x = -2$

d'où les points C(-2, 4) et D(8, 4)

b)
```
> with(plots):
> c:=implicitplot(x^2+y^2-6*x-8*y=0,x=-2..8,y=-1..9,
  color=orange):
> y12:=plot([-1,9],x=0.5..5.5,color=blue):
> x1:=plot([-2,y,y=1.5..6.5],color=green):
> x2:=plot([8,y,y=1.5..6.5],color=green):
> display(c,y12,x1,x2,scaling=constrained,view=[-2..8,-1..9]);
```



3. Il faut vérifier que le produit des pentes des tangentes respectives au point (1, 2) est égal à -1.

$$(y_1^4 - 2x^2)' = (14)'$$
$$4y_1^3y_1' - 4x = 0$$
$$y_1' = \frac{x}{y_1^3}$$
$$m_1 = y_1'\big|_{(1,\,2)} = 2$$

$$(y_2^{-2})' = \left(\frac{1}{4} + 2\ln x\right)'$$
$$-2y_2^{-3}y_2' = \frac{2}{x}$$
$$y_2' = \frac{-y_2^3}{x}$$
$$m_2 = y_2'\big|_{(1,\,2)} = \frac{-1}{2}$$

Puisque $m_1(m_2) = 2\left(\dfrac{-1}{2}\right) = -1$, les courbes sont orthogonales au point (1, 2).

4. a)

$$y = (\sin x^2)^{\cos 3x}$$
$$\ln y = \ln(\sin x^2)^{\cos 3x}$$
$$\ln y = \cos 3x \ln \sin x^2$$
$$(\ln y)' = (\cos 3x \ln \sin x^2)'$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -3\sin 3x \ln \sin x^2 + \cos 3x \frac{1}{\sin x^2} 2x\cos x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = y(-3\sin 3x \ln \sin x^2 + 2x\cos 3x \cot x^2)$$
$$\frac{dy}{dx} = (\sin x^2)^{\cos 3x}(-3\sin 3x \ln \sin x^2 + 2x\cos 3x \cot x^2)$$

b)

$$y = \frac{10^{x^2}\cos 3x}{\sqrt{x}\sin^4 x^5}$$
$$\ln y = \ln\left(\frac{10^{x^2}\cos 3x}{\sqrt{x}(\sin x^5)^4}\right)$$
$$= \ln 10^{x^2} + \ln\cos 3x - \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln(\sin x^5)^4$$
$$(\ln y)' = \left[x^2\ln 10 + \ln\cos^3 x - \frac{1}{2}\ln x - 4\ln(\sin x^5)\right]'$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x\ln 10 - \frac{3\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{1}{2x} - 4\frac{(\cos x^5)}{(\sin x^5)}5x^4$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{10^{x^2}\cos 3x}{\sqrt{x}\sin^4 x^5}\left[2x\ln 10 - 3\tan 3x - \frac{1}{2x} - 20x^4\cot x^5\right]$$

c)

$$1 - x = y^y$$
$$\ln(1 - x) = \ln y^y$$
$$\big(\ln(1 - x)\big)' = (y\ln y)'$$
$$\frac{-1}{1 - x} = y'\ln y + y\frac{1}{y}y'$$
$$\frac{-1}{1 - x} = y'(\ln y + 1)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1 - x)(1 + \ln y)}$$

d)

$$y = (\ln x)^{\ln x}$$
$$\ln y = \ln\big((\ln x)^{\ln x}\big)$$
$$(\ln y)' = \big(\ln x \ln(\ln x)\big)'$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ln(\ln x) + \ln x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = (\ln x)^{\ln x}\left[\frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{1}{x}\right]$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)^{\ln x}}{x}\big[1 + \ln(\ln x)\big]$$

e)
$$y=\left(\frac{(1-x^4)e^x}{(5x^2-2x+1)}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$\ln y=\ln\left(\frac{(1-x^4)e^x}{(5x^2-2x+1)}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$\ln y=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{(1-x^4)e^x}{(5x^2-2x+1)}\right)$$
$$\ln y=\frac{1}{5}\big(\ln(1-x^4)+\ln(e^x)-\ln(5x^2-2x+1)\big)$$
$$\ln y=\frac{1}{5}\big(\ln(1-x^4)+x-\ln(5x^2-2x+1)\big)$$
$$(\ln y)'=\left\{\frac{1}{5}\big(\ln(1-x^4)+x-\ln(5x^2-2x+1)\big)\right\}'$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\left(\frac{-4x^3}{1-x^4}+1-\frac{10x-2}{5x^2-2x+1}\right)$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}y\left(\frac{-4x^3}{1-x^4}+1-\frac{10x-2}{5x^2-2x+1}\right)$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{(1-x^4)e^x}{(5x^2-2x+1)}}\left(\frac{-4x^3}{1-x^4}+1-\frac{10x-2}{5x^2-2x+1}\right)$$

f)
$$y=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{x-1}$$
$$\ln y=\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)^{x-1}$$
$$\ln y=(x-1)\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$
$$\ln y=(x-1)\big(\ln(1-x)-\ln x\big)$$
$$(\ln y)'=\big[(x-1)\big(\ln(1-x)-\ln x\big)\big]'$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\big(\ln(1-x)-\ln x\big)+(x-1)\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{dy}{dx}=y\left[\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)+(x-1)\left(\frac{-1}{(1-x)x}\right)\right]$$
$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right)$$

5. Calculons d'abord $f'(x)$.

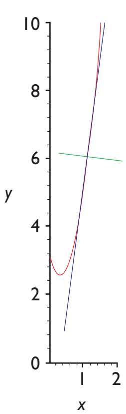
$$f(x)=3(2x)^x$$
$$\ln f(x)=\ln\big(3(2x)^x\big)$$
$$\ln f(x)=\ln 3+\ln(2x)^x$$
$$\ln f(x)=\ln 3+x\ln(2x)$$
$$\big(\ln f(x)\big)'=\big(\ln 3+x\ln(2x)\big)'$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(2x)+x\left(\frac{2}{2x}\right)$$
$$f'(x)=f(x)\big(1+\ln(2x)\big)$$

Ainsi $f'(x)=3(2x)^x\big(1+\ln(2x)\big)$

a) Équation de la tangente D_1 :
$$\frac{y-f(1)}{x-1}=f'(1)$$
$$y-3(2)=3(2)(1+\ln 2)(x-1)$$
$$y-6=6(1+\ln 2)x-6(1+\ln 2)$$
d'où D_1 : $y=6(1+\ln 2)x-6\ln 2$

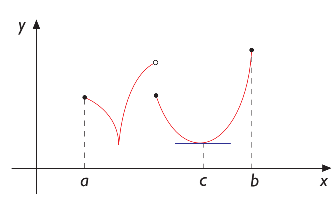
b) Équation de la normale D_2 :
$$\frac{y-f(1)}{x-1}=\frac{-1}{f'(1)}$$
$$y-6=\frac{-1}{6(1+\ln 2)}(x-1)$$
$$y-6=\frac{-x}{6(1+\ln 2)}+\frac{1}{6(1+\ln 2)}$$
d'où D_2 : $y=\frac{-x}{6(1+\ln 2)}+\frac{37+36\ln 2}{6(1+\ln 2)}$

c)
```
> with(plots):
> f:=x->3*(2*x)^x;
```
$$f:=x\to 3(2x)^x$$
```
> y1:=x->6*(1+ln(2))*x-6*ln(2);
```
$$y1:=x\to 6\big(1+\ln(2)\big)x-6\ln(2)$$
```
> y2:=x->(-x/(6*(1+ln(2))))+(37+36*ln(2))/(6*(1+ln(2)));
```
$$y2:=x\to -\frac{x}{6+6\ln(2)}+\frac{37+36\ln(2)}{6+6\ln(2)}$$
```
> c:=plot(f(x),x=0..2,y=0..10,color=orange):
> D1:=plot(y1(x),x=0.5..1.5,color=blue):
> D2:=plot(y2(x),x=0.2..1.8,color=green):
> display(c,D1,D2,scaling=constrained);
```



6. a) [2, 3]
b) [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]

7.



1) f est non continue sur $[a, b]$

2) f est non dérivable sur $]a, b[$

3) $f(a)\neq f(b)$

Aucune des hypothèses du théorème de Rolle n'est vérifiée.

Il existe un $c\in\,]a, b[$ tel que $f'(c)=0$.

1

8. a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ sur $[1, 3]$

1) f est continue sur $[1, 3]$, car f est une fonction polynomiale.

2) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$
f est dérivable sur $]1, 3[$, car f' est définie sur $]1, 3[$.

3) $f(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 0$ et
$f(3) = 3^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$,
d'où $f(1) = f(3)$

Ainsi, les trois hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées. Déterminons la valeur de c.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$
Ainsi $f'(c) = 3c^2 - 4c - 5$
$3c^2 - 4c - 5 = 0$ (car $f'(c) = 0$)
$$c_1 = \frac{4 + \sqrt{16 + 60}}{6},\ c_2 = \frac{4 - \sqrt{16 + 60}}{6}$$
d'où $c = \dfrac{2 + \sqrt{19}}{3}$ $\left(c_2 = \dfrac{2 - \sqrt{19}}{3} \notin]1, 3[\right)$

b) $g(x) = 5 + |x - 3|$ sur $[1, 5]$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Ainsi $g(x) = \begin{cases} 5 + (x - 3) & \text{si } x \geq 3 \\ 5 + (3 - x) & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x \geq 3 \\ 8 - x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Ainsi, g est non dérivable en $x = 3$ et $3 \in\ ]1, 5[$.
Donc, la deuxième hypothèse du théorème de Rolle n'est pas vérifiée.

c) $v(t) = t^3 + \dfrac{1}{t^3}$ sur $\left[-3, \dfrac{-1}{3}\right]$

1) v n'est pas définie pour $t = 0$. Ainsi v est continue sur $\left[-3, \dfrac{-1}{3}\right]$ car $0 \notin \left[-3, \dfrac{-1}{3}\right]$.

2) $v'(t) = 3t^2 - 3t^{-4} = \dfrac{3(t^6 - 1)}{t^4}$
v' n'est pas définie pour $t = 0$. Ainsi v est dérivable sur $\left]-3, \dfrac{-1}{3}\right[$ car $0 \notin \left]-3, \dfrac{-1}{3}\right[$.

3) $v(-3) = (-3)^3 + \dfrac{1}{(-3)^3} = -27 - \dfrac{1}{27}$ et
$$v\left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \frac{1}{\left(\frac{-1}{3}\right)^3} = \frac{-1}{27} - 27$$
d'où $v(-3) = v\left(\dfrac{-1}{3}\right)$

Ainsi, les trois hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées.

Déterminons la valeur de c.
$$v'(t) = \frac{3(t^6 - 1)}{t^4},\ v'(c) = \frac{3(c^6 - 1)}{c^4}$$
$$v'(c) = 0$$
$$\frac{3(c^6 - 1)}{c^4} = 0$$
$$3(c^3 - 1)(c^3 + 1) = 0$$
$c_1 = 1,\ c_2 = -1$
d'où $c = -1$ $\left(c_1 = 1 \notin \left]-3, \dfrac{-1}{3}\right[\right)$

d) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$ sur $[-1, 1]$
Puisque f est discontinue en $x = 0$ et que $0 \in [-1, 1]$, la première hypothèse du théorème de Rolle n'est pas vérifiée.

e) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$ sur $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$

1) f n'est pas définie pour $x = 0$. Ainsi f est continue sur $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ car $0 \notin \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$

2) $f'(x) = \dfrac{4x^5 - 2x(x^4 + 1)}{(x^2)^2} = \dfrac{2x^4 - 2}{x^3}$
f' n'est pas définie pour $x = 0$. Ainsi f est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$ car $0 \notin \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$.

3) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{17}{4}$ et $f(2) = \dfrac{16 + 1}{4} = \dfrac{17}{4}$,
d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$

Ainsi, les trois hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées. Déterminons la valeur de c.
$$f'(x) = \frac{2x^4 - 2}{x^3}$$
$$f'(c) = \frac{2c^4 - 2}{c^3}$$
$$\frac{2c^4 - 2}{c^3} = 0 \text{ (car } f'(c) = 0)$$
$$2c^4 - 2 = 0$$
$$2(c - 1)(c + 1)(c^2 + 1) = 0$$
$c_1 = 1,\ c_2 = -1$
d'où $c = 1$ $\left(c_2 = -1 \notin \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]\right)$

f) $h(1) = \sqrt{1} = 1$ et $h(9) = \sqrt{9} = 3$, ainsi $h(1) \neq h(9)$ et la troisième hypothèse du théorème de Rolle n'est pas vérifiée.

g) $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$ sur $[-4, -2]$

1) f est continue sur $[-4, -2]$.

2) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x + 3)^2}}$
f' n'est pas définie en $x = -3$, où $-3 \in\ ]-4, -2[$
Ainsi f est non dérivable en $x = -3$.
Donc, la deuxième hypothèse du théorème de Rolle n'est pas vérifiée.

h) $g(\theta) = \tan\theta$ sur $[0, \pi]$
Puisque g est discontinue en $\dfrac{\pi}{2}$ et que $\dfrac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, la première hypothèse du théorème de Rolle n'est pas vérifiée.

i) $x(t) = t^4 - 3t^2 + 1$ sur $[-3, 3]$

1) x est continue sur $[-3, 3]$, car x est une fonction polynomiale.

2) $x'(t) = 4t^3 - 6t$

x est dérivable sur $]-3, 3[$, car x' est définie sur $]-3, 3[$

3) $x(-3) = (-3)^4 - 3(-3)^2 + 1 = 55$

$x(3) = (3)^4 - 3(3)^2 + 1 = 55$

$x(1) = x(3)$

Ainsi, les trois hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées.

Déterminons la valeur de c.

$$x'(t) = 4t^3 + 6t, \text{ ainsi } x'(c) = 4c^3 - 6c$$
$$x'(c) = 0$$
$$4c^3 - 6c = 0$$
$$2c(2c^2 - 3) = 0$$
$$c_1 = 0,\ c_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ et } c_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

d'où $c_1 = 0,\ c_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $c_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

9. a) $f(x) = x^3$ sur $[-2, 1]$

1) f est continue sur $[-2, 1]$, car f est une fonction polynomiale.

2) $f'(x) = 3x^2$

f est dérivable sur $]-2, 1[$, car f' est définie sur $]-2, 1[$.

Les hypothèses du théorème de Lagrange sont vérifiées, donc $\exists\, c \in\ ]-2, 1[$ tel que

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = f'(c)$$

Déterminons la valeur de c.

$$\frac{1^3 - (-2)^3}{3} = 3c^2$$
$$1 = c^2$$

Ainsi $c_1 = -1$ et $c_2 = 1$

d'où $c = -1$ $\qquad (c_2 = 1 \notin\ ]-2, 1[)$

b) $f(x) = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$ sur $[-2, 2]$

1) f est continue sur $[-2, 2]$, aucune discontinuité.

2) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x - 1)}}$

f est non dérivable en $x = 1$ et $1 \in\ ]-2, 2[$.

Donc, la deuxième hypothèse du théorème de Lagrange n'est pas vérifiée.

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ sur $[0, 8]$

1) f est continue sur $[0, 8]$, aucune discontinuité.

2) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

f est dérivable sur $]0, 8[$, car f' est définie sur $]0, 8[$. Les hypothèses du théorème de Lagrange sont vérifiées, donc $\exists\, c \in\ ]0, 8[$ tel que

$$\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = f'(c)$$

Déterminons la valeur de c.

$$\frac{\left(\sqrt[3]{8} - 1\right) - (-1)}{8 - 0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$$
$$\sqrt[3]{c^2} = \frac{4}{3}$$

Ainsi, $c_1 = \dfrac{-8\sqrt{3}}{9}$ et $c_2 = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

d'où $c = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ $\qquad \left(c_1 = \dfrac{-8\sqrt{3}}{9} \notin\ ]0, 8[\right)$

d) $f(x) = \text{Arc tan}\, x$ sur $[-1, 1]$

1) f est continue sur $[-1, 1]$, aucune discontinuité.

2) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

f est dérivable sur $]-1, 1[$, car f' est définie sur $]-1, 1[$. Les hypothèses du théorème de Lagrange sont vérifiées, donc $\exists\, c \in\ ]-1, 1[$ tel que

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c)$$

Déterminons la valeur de c.

$$\frac{\text{Arc tan}\,1 - \text{Arc tan}\,(-1)}{2} = \frac{1}{1 + c^2}$$
$$\frac{\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1}{1 + c^2}$$
$$1 + c^2 = \frac{4}{\pi}$$
$$c^2 = \frac{4}{\pi} - 1$$

d'où $c_1 = -\sqrt{\dfrac{4}{\pi} - 1}$ et $c_2 = \sqrt{\dfrac{4}{\pi} - 1}$

e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $[-1, 1]$

1) f n'est pas définie en $x = 0$.

Ainsi f n'est pas continue sur $[-1, 1]$, car $0 \in [-1, 1]$. Donc, la première hypothèse du théorème de Lagrange n'est pas vérifiée.

f) $f(x) = \left(4 - \sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ sur $[0, 16]$

1) f est continue sur $[0, 16]$.

2) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{4 - \sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}$

f est dérivable sur $]0, 16[$, car f' est définie sur $]0, 16[$. Les hypothèses du théorème de Lagrange sont vérifiées, donc $\exists\, c \in]0, 16[$ tel que

$$\frac{f(16) - f(0)}{16 - 0} = f'(c)$$

Déterminons la valeur de c.

$$\frac{3\sqrt{4-\sqrt{c}}}{4\sqrt{c}} = \frac{0-8}{16}$$

$$\frac{\sqrt{4-\sqrt{c}}}{\sqrt{c}} = \frac{-2}{3}$$

$$\frac{4-\sqrt{c}}{c} = \frac{4}{9}$$

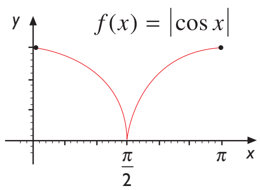
$$16c^2 - 369c + 1296 = 0$$

d'où $c = \dfrac{369 - \sqrt{53\,217}}{32}$

$$\left(c_2 = \frac{369 + \sqrt{53\,217}}{32} \notin\ ]0,\ 16[\right)$$

g) $f(x) = |\cos x|$ sur $[0, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$



1) f est continue sur $[0, \pi]$.

2) f n'est pas dérivable sur $]0, \pi[$, car $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ n'est pas définie.

Donc, la deuxième hypothèse du théorème de Lagrange n'est pas vérifiée.

h) $f(x) = 3{,}8x^5 - 38x^3$ sur $[-3, 3]$

1) f est continue sur $[-3, 3]$.

2) $f'(x) = 19x^4 - 114x^2$

f est dérivable sur $]-3, 3[$, car f' est définie sur $]-3, 3[$.

Les hypothèses du théorème de Lagrange sont vérifiées, donc $\exists\, c \in\ ]-3, 3[$ tel que

$$\frac{f(3) - f(-3)}{3-(-3)} = f'(c)$$

Déterminons la valeur de c.

$$\frac{[3{,}8(3)^5 - 38(3)^3] - [3{,}8(-3)^5 - 38(-3)^3]}{6} = 19c^4 - 114c^2$$

$$19c^4 - 114c^2 + 34{,}2 = 0$$

$$19(c^4 - 6c^2 + 1{,}8) = 0$$

$$c^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 7{,}2}}{2} = 3 \pm 6\sqrt{0{,}2}$$

$$c^2 = 3 - 6\sqrt{0{,}2} \text{ ou } c^2 = 3 + 6\sqrt{0{,}2}$$

$$c = \pm\sqrt{3 - 6\sqrt{0{,}2}} \text{ ou } c = \pm\sqrt{3 + 6\sqrt{0{,}2}}$$

d'où nous obtenons quatre valeurs de c possibles.

$$c_1 = -\sqrt{3 - 6\sqrt{0{,}2}} \approx -0{,}56$$

$$c_2 = \sqrt{3 - 6\sqrt{0{,}2}} \approx 0{,}56$$

$$c_3 = -\sqrt{3 + 6\sqrt{0{,}2}} \approx -2{,}38$$

$$c_4 = \sqrt{3 + 6\sqrt{0{,}2}} \approx 2{,}38$$

10. a) Soit $f(x) = \ln(\csc x + \cot x) + \ln(\csc x - \cot x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\csc x \cot x - \csc^2 x}{\csc x + \cot x} + \frac{-\csc x \cot x + \csc^2 x}{\csc x - \cot x} \\ &= \frac{-\csc x(\cot x + \csc x)}{\csc x + \cot x} + \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} \\ &= -\csc x + \csc x = 0 \end{aligned}$$

Puisque $f'(x) = 0$, $\forall\, x$ où f est définie, d'après le corollaire 1, $f(x) = C$.

Ainsi $\ln(\csc x + \cot x) + \ln(\csc x - \cot x) = C$

En posant $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\ln 1 + \ln 1 = C$

d'où $C = 0$

b) Soit $f(x) = (\ln x^2)(\ln 2x) - (\ln x)^2$ et $g(x) = (\ln 2x)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x}(\ln 2x) + (\ln x^2)\frac{1}{x} - \frac{2(\ln x)}{x} \\ &= \frac{2(\ln 2x)}{x} + \frac{2(\ln x)}{x} - \frac{2(\ln x)}{x} \\ &= \frac{2(\ln 2x)}{x} \end{aligned}$$

$$g'(x) = 2(\ln 2x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(\ln 2x)}{x}$$

Puisque $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x$ où f et g sont définies, d'après le corollaire 2,

$$f(x) = g(x) + C$$

$$(\ln x^2)(\ln 2x) - (\ln x)^2 = (\ln 2x)^2 + C$$

En posant $x = 1$,

$$(\ln 1)(\ln 2) - (\ln 1)^2 = (\ln 2)^2 + C$$

$$0 = (\ln 2)^2 + C$$

d'où $C = -(\ln 2)^2$

c) Soit $f(x) = \text{Arc tan}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ et $g(x) = \text{Arc tan}(-x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x}{1+x^4}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+(-x^2)^2}(-2x) = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Puisque $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x$ où f et g sont définies, d'après le corollaire 2, $f(x) = g(x) + C$.

Ainsi $\text{Arc tan}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \text{Arc tan}(-x^2) + C$

En posant $x = 0$,

nous obtenons $\text{Arc tan } 1 = \text{Arc tan } 0 + C$,

d'où $C = \dfrac{\pi}{4}$

11. a) Dans le cas où $x = 0$, $\sin^2 0 = 0 = 2(0)$

Dans le cas où $x > 0$, appliquons le théorème de Lagrange à $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0, x]$, où $x \in]0, +\infty$

1) f est continue sur $[0, x]$.

2) f est dérivable sur $]0, x[$, car $f'(x) = 2\sin x\cos x$ est définie $\forall\ x \in]0, +\infty$.

Alors $\exists\ c \in]0, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$

Ainsi

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 0}{x - 0} = 2\sin c\cos c$$

$$\frac{\sin^2 x}{x} < 2 \quad (\text{car } \sin c\cos c < 1, \forall\ c \in]0, +\infty)$$

$$\sin^2 x < 2x, \forall\ x \in]0, +\infty$$

d'où $\sin^2 x \leq 2x$, $\forall\ x \in [0, +\infty$

b) Dans le cas où $x = 0$, $\sqrt{1 + 2(0)} = 0 + 1$

Dans le cas où $x > 0$, appliquons le théorème de Lagrange à $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$ sur $[0, x]$, où $x \in]0, +\infty$

1) f est continue sur $[0, x]$.

2) f est dérivable sur $]0, x[$, car $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$ est définie $\forall\ x \in]0, +\infty$.

Alors $\exists\ c \in]0, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$

Ainsi

$$\frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2c}}$$

$$\frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x} < 1 \quad \left(\text{car } \frac{1}{\sqrt{1 + 2c}} < 1, \forall\ c \in]0, +\infty\right)$$

$$\sqrt{1 + 2x} - 1 < x$$

$$\sqrt{1 + 2x} < x + 1, \forall\ x \in]0, +\infty$$

d'où $\sqrt{1 + 2x} \leq x + 1$, $\forall\ x \in [0, +\infty$

c) Appliquons le théorème de Lagrange à $f(x) = e^{ax}$ sur $[0, x]$, où $x \in]0, +\infty$

1) f est continue sur $[0, x]$.

2) f est dérivable sur $]0, x[$, car $f'(x) = ae^{ax}$ est définie $\forall\ x \in]0, +\infty$.

Alors $\exists\ c \in]0, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$

Ainsi $\dfrac{e^{ax} - 1}{x} = ae^{ac}$

$$\frac{e^{ax} - 1}{x} > a \quad \left(\text{car } (e^{ac}) > 1, \forall\ c \in]0, +\infty\right)$$

$$e^{ax} - 1 > ax$$

d'où $e^{ax} > ax + 1$, $\forall\ x \in]0, +\infty$

d) $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$ sur $[0, x]$, où $x \in]0, +\infty$

Les hypothèses du théorème de Lagrange étant vérifiées, $\exists\ c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{(1 + x)^n - 1 - nx - 0}{x - 0} = n(1 + c)^{n-1} - n$$

$$\frac{(1 + x)^n - 1 - nx}{x} > 0 \ (\text{car } (1 + c)^{n-1} > 1),$$

d'où $(1 + x)^n > (1 + nx), \forall\ x \in]0, +\infty$

e) Dans le cas où $x = 0$, $\dfrac{-0}{0 + 1} = \ln(0 + 1) = 0$

Dans le cas où $x > 0$

D'une part, $\dfrac{-x}{x + 1} < 0$ et $\ln(1 + x) > 0$

donc $\dfrac{-x}{x + 1} < \ln(1 + x)$

D'autre part, appliquons le théorème de Lagrange à $f(x) = \ln(1 + x)$ sur $]0, x[$

Les hypothèses du théorème de Lagrange étant vérifiées, $\exists\ c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

$$\frac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x} = \frac{1}{1 + c}$$

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} < 1 \quad \left(\text{car } \frac{1}{1 + c} < 1, \forall\ c \in]0, +\infty\right)$$

donc $\quad \ln(1 + x) < x$

d'où $\dfrac{-x}{x + 1} \leq \ln(1 + x) \leq x$, $\forall\ x \in [0, +\infty$

12. a) i) 1) f et g sont continues sur $[0, 1]$ (fonctions polynomiales)

2) f et g sont dérivables sur $]0, 1[$ (fonctions polynomiales)

3) $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$, donc $f(0) = f(1)$

$g(0) = 0$ et $g(1) = 0$, donc $g(0) = g(1)$

d'où f et g satisfont les hypothèses du théorème de Rolle.

ii) $f'(x) = 3x^2(x - 1)^2 + 2x^3(x - 1)$
$= x^2(x - 1)[3(x - 1) + 2x]$

$g'(x) = 4x^3(x - 1)^2 + 2x^4(x - 1)$
$= x^3(x - 1)[4(x - 1) + 2x]$

$\exists\ c_f \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c_f) = 0$$

$$c_f^2(c_f - 1)[3(c_f - 1) + 2c_f] = 0$$

d'où $c_f = \dfrac{3}{5}$

$\exists\ c_g \in]0, 1[$ tel que

$$g'(c_g) = 0$$

$$c_g^3(c_g - 1)[4(c_g - 1) + 2c_g] = 0$$

d'où $c_g = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

iii) $\dfrac{c_f}{1-c_f} = \dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{c_g}{1-c_g} = \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$

b) i) 1) h est continue sur $[0, 1]$ (fonction polynomiale)

2) h est dérivable sur $]0, 1[$ (fonction polynomiale)

3) $h(0) = 0$ et $h(1) = 0$, donc $h(0) = h(1)$

ainsi h satisfait les hypothèses du théorème de Rolle.
Déterminons la valeur de

$c_h \in]0, 1[$ tel que $h'(c_h) = 0$

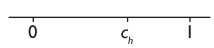
$$\begin{aligned} h'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}\left[m(x-1)+nx\right] \end{aligned}$$

$$h'(c_h) = 0$$

$$c_h^{m-1}(c_h-1)^{n-1}\left[m(c_h-1)+nc_h\right] = 0$$

d'où $c_h = \dfrac{m}{m+n}$

ii) $\dfrac{c_h}{1-c_h} = \dfrac{\frac{m}{m+n}}{1-\frac{m}{m+n}}$



d'où $\dfrac{c_h}{1-c_h} = \dfrac{m}{n}$

iii) $k(x) = x^7(x-1)^5$
En utilisant le résultat obtenu en i) avec $m = 7$ et $n = 5$,
nous obtenons $c_k = \dfrac{7}{7+5}$

d'où $c_k = \dfrac{7}{12}$

13. a) Vérifions si les hypothèses du théorème de Cauchy sont satisfaites.

1) f et g sont continues sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) f est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, car $f'(x) = 2\cos 2x$

est définie sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

g est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, car $g'(x) = \text{-}2\sin 2x$

est définie sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) $g'(x) = \text{-}2\sin 2x$
$g'(x) = 0$ si $\sin 2x = 0$

$$2x = k\pi$$

$$x = k\frac{\pi}{2}, \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

ainsi $g'(x) \neq 0, \forall\, x \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

alors $\exists\, c \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}}{\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{2\cos 2c}{\text{-}2\sin 2c}$$

$$\frac{0-1}{\text{-}1-0} = \text{-}\cot 2c$$

$$\cot 2c = \text{-}1$$

$$2c = \frac{3\pi}{4}$$

d'où $c = \dfrac{3\pi}{8}$

b) Vérifions si les hypothèses du théorème de Cauchy sont satisfaites.

1) f et g sont continues sur $[0, 1]$.

2) $f'(x) = 6xe^{3x^2}$ et $g'(x) = 4xe^{2x^2}$
sont définies sur $]0, 1[$
d'où f et g sont dérivables sur $]0, 1[$.

3) $g'(x) = 4xe^{2x^2}$
$g'(x) = 0$ si $x = 0 \notin]0, 1[$
ainsi $g'(x) \neq 0, \forall\, x \in]0, 1[$

alors $\exists\, c \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{(e^3-1)-0}{(e^2+1)-2} = \frac{6ce^{3c^2}}{4ce^{2c^2}}$$

$$\frac{e^3-1}{e^2-1} = \frac{3}{2}e^{c^2}$$

$$e^{c^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^3-1}{e^2-1}\right)$$

$$c^2 = \ln\left(\frac{2}{3}\left(\frac{e^3-1}{e^2-1}\right)\right)$$

d'où $c = \sqrt{\ln\left(\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{e^3-1}{e^2-1}\right)\right)} \approx 0{,}83$

14. Puisque les fonctions f et g satisfont les hypothèses du théorème de Lagrange, nous pouvons déterminer c_1 et c_2.

a) $\exists\, c_1 \in]0, 8[$ tel que

$$\frac{f(8)-f(0)}{8-0} = f'(c_1)$$

$$\frac{68-4}{8} = 2c_1$$

d'où $c_1 = 4$

b) $\exists\, c_2 \in]0, 8[$ tel que

$$\frac{g(8)-g(0)}{8-0} = g'(c_2)$$

$$\frac{513-1}{8} = 3c_2^2$$

d'où $c_2 = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ $\left(\dfrac{\text{-}8\sqrt{3}}{3} \notin]0, 8[\right)$

c) Vérifions d'abord les hypothèses du théorème de Cauchy.

1) f et g sont continues sur $[0, 8]$.

2) f et g sont dérivables sur $]0, 8[$.

3) $g'(x) = 3x^2 \neq 0,\ \forall\, x \in\ ]0, 8[$.

Donc $\exists\, c \in\ ]0, 8[$ tel que

$$\frac{f(8) - f(0)}{g(8) - g(0)} = \frac{2c}{3c^2}$$

Ainsi $\dfrac{2}{3c} = \dfrac{68 - 4}{513 - 1}$

d'où $c = \dfrac{16}{3}$

15. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2}$$
$$= 0$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x \sin x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x \sin x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{\sin x + x\cos x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sec^2 x \tan x}{2\cos x - x \sin x}$$
$$= 0$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (e^x \operatorname{Arc\,tan} e^{-x}) \quad (\text{ind. } +\infty \cdot 0)$

$$\lim_{x\to +\infty} (e^x \operatorname{Arc\,tan} e^{-x}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan} e^{-x}}{e^{-x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{1}{1 + (e^{-x})^2}(-e^{-x})}{-e^{-x}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 + (e^{-x})^2}$$
$$= 1$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x} + 4x - 7}{e^{2x} + 3x - 1} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x} + 4x - 7}{e^{2x} + 3x - 1} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3e^{3x} + 4}{2e^{2x} + 3} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{9e^{3x}}{4e^{2x}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{9e^{x}}{4}$$
$$= +\infty$$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (\text{ind. } 1^{+\infty})$

Si $A = \displaystyle\lim_{x\to \pi^-} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$, alors $\ln A = \displaystyle\lim_{x\to \pi^-} \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$\ln A = \lim_{x\to \pi^-} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \ln\left(\frac{x}{\pi}\right) \quad (\text{ind. } (+\infty)\cdot 0)$$
$$= \lim_{x\to \pi^-} \frac{\ln\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}{\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to \pi^-} \frac{\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{\pi}\right)} \cdot \dfrac{1}{\pi}}{\dfrac{-1}{2}\csc^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$
$$= \frac{\dfrac{1}{\pi}}{\dfrac{-1}{2}}$$
$$= \frac{-2}{\pi}$$

d'où $A = e^{\frac{-2}{\pi}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Arc\,tan} x}{x - \operatorname{Arc\,sin} x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Arc\,tan} x}{x - \operatorname{Arc\,sin} x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1 + x^2}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}}{\dfrac{-x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + x^2)^2}$$
$$= -2$$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2x}}}\right)^{3x} \quad (\text{ind. } 0^0)$

Si $A = \displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2x}}}\right)^{3x}$, alors $\ln A = \displaystyle\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2x}}}\right)^{3x}$

$$\ln A = \lim_{x\to 0} 3x \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2x}}}\right) \quad (\text{ind. } 0 \cdot (+\infty))$$
$$= \lim_{x\to 0} 3x\left(\ln 1 - \ln\left(e^{\frac{1}{2x}}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} 3x\left(\frac{-1}{2x} \ln e\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3x}{2x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3}{2}$$
$$= \frac{-3}{2}$$

d'où $A = e^{\frac{-3}{2}}$

1

h) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$ $\left(\text{ind. } 0\cdot(+\infty)\right)$

$$\lim_{x\to 0} x\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{\pm\infty}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= 0$$

i) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\pi^2\sec x - 4x^2\tan x)$ $(\text{ind. } +\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\pi^2\sec x - 4x^2\tan x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\pi^2}{\cos x} - \frac{4x^2\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\pi^2 - 4x^2\sin x}{\cos x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{-8x\sin x - 4x^2\cos x}{-\sin x}$$

$$= \frac{-4\pi}{-1}$$

$$= 4\pi$$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}\right)^x$ $(\text{ind. } 1^{+\infty})$

Si $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x$, alors $\ln A = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}\right)^x$

$$\ln A = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{3+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}\right) \quad \left(\text{ind. } +\infty\cdot(0)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(3+\frac{1}{x}\right) - \ln\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\left(3+\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{-1}{x^2}\right) - \frac{1}{\left(3-\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(3+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{\left(3-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$= \frac{2}{3}$$

d'où $A = e^{\frac{2}{3}}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{2}{e^{2x}-1}\right)$ $(\text{ind. } (\pm\infty) - (\pm\infty))$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x-1)(e^{2x}-1)} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x} - 2e^x}{e^x(e^{2x}-1) + 2e^{2x}(e^x-1)} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x} - 2e^x}{3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x} - 2e^x}{9e^{3x} - 4e^{2x} - e^x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

l) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2(\tan\pi x)^{(1-2x)} = 2\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}(\tan\pi x)^{(1-2x)}$ $(\text{ind. } (+\infty)^0)$

Si $A = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}(\tan\pi x)^{(1-2x)}$

alors $\ln A = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\ln(\tan\pi x)^{(1-2x)}$

$$\ln A = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}(1-2x)\ln(\tan\pi x) \quad (\text{ind. } 0\cdot(+\infty))$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{\ln(\tan\pi x)}{\frac{1}{(1-2x)}} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{\frac{\pi\sec^2\pi x}{\tan\pi x}}{\frac{2}{(1-2x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{\pi(1-2x)^2}{2(\sin\pi x)(\cos\pi x)} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{-4\pi(1-2x)}{2\pi\cos^2\pi x - 2\pi\sin^2\pi x}$$

$$= 0$$

Ainsi $A = e^0 = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2(\tan\pi x)^{(1-2x)} = 2A = 2$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + x\sin 2x}{x - \sin 2x}$ $\left(\text{ind. } \dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x + x\sin 2x}{x - \sin 2x} \stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1 + \sin 2x + 2x\cos 2x}{1 - 2\cos 2x}$$

$$= -1$$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}} - \dfrac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}}}{2}$$

$$= \frac{-1}{4}$$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-1\right) \quad (\text{ind. } (+\infty)\cdot 0)$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(4^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\dfrac{1}{x^2}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{4^{\frac{1}{x}} \ln 4\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}{\dfrac{-2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x4^{\frac{1}{x}} \ln 4}{2}$$

$$= +\infty$$

p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{1-\cos\sqrt{x}} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{1-\cos\sqrt{x}} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}\cos x}{\sin\sqrt{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\sin x}{\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\cos x - 2x\sin x)}{\cos\sqrt{x}}$$

$$= 2$$

q) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{2x}} \quad (\text{ind. } 1^{+\infty})$

Si $A = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{2x}}$

alors $\ln A = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{2x}}$

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x}\ln\left(1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) \quad (\text{ind. } +\infty\cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}{2x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{\left(1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

d'où $A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) \quad (\text{ind. } +\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x - 2x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin x\cos x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2}{2\sin^2 x + 8x\sin x\cos x + 2x^2\cos^2 x - 2x^2\sin^2 x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-8\sin(x)\cos(x)}{12\sin x\cos x + 12x\cos^2 x - 12x\sin^2 x - 8x^2\sin(x)\cos(x)} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos^2 x + 8\sin^2 x}{24\cos^2 x - 24\sin^2 x - 64x\sin x\cos x - 8x^2\cos^2 x + 8x^2\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{3}$$

16. a) i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \quad (\text{ind. } 0^0)$

Si $A = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, alors $\ln A = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x$

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \quad (\text{ind. } 0\cdot(-\infty))$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x)$$

$$= 0$$

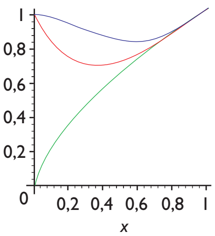
Ainsi $A = e^0 = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)} = 0^1 = 0$

iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x)^x = 1^0 = 1$

b) i)
```
> with(plots):
> c1:=plot(x^x,x=0..1,color=orange):
> c2:=plot((x^x)^x,x=0..1,color=blue):
> c3:=plot(x^(x^x),x=0..1,color=green):
> display(c1,c2,c3,scaling=constrained);
```

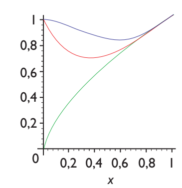
1




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■X^X
\Y2■(X^X)^X
\Y3■X^(X^X)
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

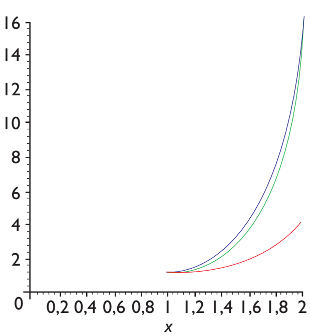
```
WINDOW
Xmin=Ø
Xmax=1
Xscl=.2
Ymin=Ø
Ymax=1
Yscl=.2
Xres=1
```

GRAPH



ii)

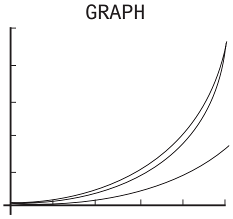
```
> with(plots):
> c1:=plot(x^x,x=1..2,color=orange):
> c2:=plot((x^x)^x,x=1..2,color=blue):
> c3:=plot(x^(x^x),x=1..2,color=green):
> display(c1,c2,c3,view=[0..2,0..16]);
```




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■X^X
\Y2■(X^X)^X
\Y3■X^(X^X)
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=1
Xmax=2
Xscl=.2
Ymin=1
Ymax=18
Yscl=2
Xres=1
```

GRAPH



17. a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$ $\left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+\sin 2x}{x^2+\cos 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\dfrac{\sin 2x}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{\cos 3x}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\dfrac{\sin 2x}{x^2}}{1+\dfrac{\cos 3x}{x^2}}$$

$$= 3 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{car } \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2} = 0 \\ \text{et } \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos 3x}{x^2} = 0\end{array}\right)$$

b) $\lim_{x\to-\infty} (3e^{-x} - e^{-3x})$ (ind. $+\infty - \infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} (3e^{-x} - e^{-3x}) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(3 - e^{-2x})$$
$$= (+\infty)\cdot(-\infty)$$
$$= -\infty$$

c) $\lim_{x\to0^+} (x + e^{3x})^{\csc x}$ (ind. $1^{+\infty}$)

Si $A = \lim_{x\to0^+} (x+e^{3x})^{\csc x}$

alors $\ln A = \lim_{x\to0^+} \ln (x+e^{3x})^{\csc x}$

$$\ln A = \lim_{x\to0^+} \csc x \ln(x+e^{3x}) \qquad (\text{ind. } (+\infty)\cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x+e^{3x})}{\sin x} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{RH}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{1+3e^{3x}}{x+e^{3x}}}{\cos x}$$

$$= 4$$

d'où $A = e^4$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - x\right)$ (ind. $+\infty - \infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax} - x\right)\left(\sqrt{x^2+ax} + x\right)}{\sqrt{x^2+ax} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+1\right)} \qquad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+1}$$

$$= \frac{a}{2}$$

e) $\lim_{x\to0} \left[\dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{2x}\right]$ (ind. $(\pm\infty) - (\pm\infty)$)

$$\lim_{x\to0} \left[\frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x}\right] = \lim_{x\to0} \frac{2x - e^{2x} + 1}{2xe^{2x} - 2x} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{RH}{=} \lim_{x\to0} \frac{2 - 2e^{2x}}{2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{RH}{=} \lim_{x\to0} \frac{-4e^{2x}}{4e^{2x} + 4e^{2x} - 8xe^{2x}}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

f) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{\tan 5x}{\tan 3x} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\tan 5x}{\tan 3x} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin 5x}{\cos 5x}\,\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$
$$= \left(\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)\left(\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)$$
$$= (-1)\left(\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right) \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} (-1)\left(\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{-3\sin 3x}{-5\sin 5x}\right)$$
$$= (-1)\left(\frac{-3}{5}\right)$$
$$= \frac{3}{5}$$

g)
$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$-2 \le 2\cos x \le 2$$
$$5 + (-2) \le 5 + 2\cos x \le 2 + 5$$
$$3 \le 5 + 2\cos x \le 7$$
$$\frac{3\ln x}{x} \le \frac{(5 + 2\cos x)\ln x}{x} \le \frac{7\ln x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln x}{x} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1} = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7\ln x}{x} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7\ln x}{x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{7}{x}}{1} = 0$$

Nous avons

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{x}}_{\substack{\parallel\\ 0}} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{(5 + 2\cos x)\ln x}{x} \le \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{7\ln x}{x}}_{\substack{\parallel\\ 0}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(5 + 2\cos x)\ln x}{x} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x}{x^3} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{x^3} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)\cos x - 1}{3x^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\sin x)\cos^2 x - \cos(\sin x)\sin x}{6x} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(\sin x)\cos^3 x + 2\sin(\sin x)\cos x\sin x - \sin(\sin x)\cos x\sin x - \cos(\sin x)\cos x}{6}$$
$$= \frac{-1}{3}$$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - e^x) \quad (\text{ind. } +\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x - e^x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{\ln x}{e^x} - 1\right)$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = 0$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{\ln x}{e^x} - 1\right)$
$= -\infty \quad (\text{forme } +\infty(-1))$

18. Puisque les hypothèses du théorème de Lagrange sont satisfaites, alors $\exists\, c \in\ ]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ où } f'(c) = 2Pc + Q$$

Trouvons cette valeur de c.

$$2Pc + Q = \frac{(Pb^2 + Qb + S) - (Pa^2 + Qa + S)}{b - a}$$
$$= \frac{Pb^2 + Qb - Pa^2 - Qa}{b - a}$$
$$= \frac{P(b^2 - a^2) + Q(b - a)}{b - a}$$
$$= \frac{(b - a)\left[P(b + a) + Q\right]}{b - a}$$
$$= P(b + a) + Q$$

Donc $2Pc = P(b + a)$

d'où $c = \dfrac{b + a}{2}$, c'est-à-dire la valeur située au milieu de $[a, b]$.

19. $3N^2 + i\sqrt{N} + i^3 = 383$

a)
$$\frac{d}{di}\left(3N^2 + i\sqrt{N} + i^3\right) = \frac{d}{di}(383)$$
$$6N\frac{dN}{di} + \sqrt{N} + i\left(\frac{1}{2\sqrt{N}}\right)\frac{dN}{di} + 3i^2 = 0$$
$$\frac{dN}{di}\left(6N + \frac{i}{2\sqrt{N}}\right) = -3i^2 - \sqrt{N}$$
$$\frac{dN}{di} = \frac{-3i^2 - \sqrt{N}}{6N + \frac{i}{2\sqrt{N}}}$$
$$\left.\frac{dN}{di}\right|_{(9,\,5)} = \frac{-3(5)^2 - \sqrt{9}}{6(9) + \frac{5}{2\sqrt{9}}} = \frac{-78}{54 + \frac{5}{6}} = -1{,}422\ldots$$

d'où $\left.\dfrac{dN}{di}\right|_{(9,\,5)} \approx -1{,}422$, c'est-à-dire environ

-1422 maisons/% intérêt.

Interprétation : lorsque le taux d'intérêt i augmente,
le nombre de maisons vendues N diminue.

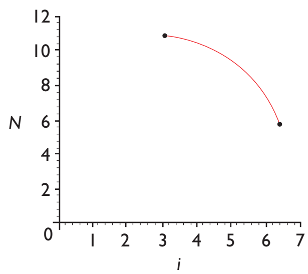
b) Calculons d'abord $\dfrac{dN}{dt}$.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{di}\,\frac{di}{dt} \quad \text{(notation de Leibniz)}$$
$$\frac{dN}{dt} = \frac{\left(-3i^2 - \sqrt{N}\right)}{\left(6N + \frac{i}{2\sqrt{N}}\right)}\,\frac{di}{dt} \quad \text{(voir a))}$$
$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{(9,\,5)} = (-1{,}422\ldots)(-0{,}5)$$
$$\left(\text{car } \left.\frac{dN}{di}\right|_{(9,\,5)} = -1{,}422\ldots \text{ et } \frac{di}{dt} = -0{,}5\right)$$

d'où $\left.\dfrac{dN}{dt}\right|_{(9,\,5)} \approx 0{,}711$, c'est-à-dire environ
711 maisons/année.

Interprétation : lorsque le taux d'intérêt i diminue,
le nombre de maisons vendues N aumente.

c)
```
> with(plots):
> c:=implicitplot(3*N^2+i*N^(1/2)+i^3=383,
  i=3..6.5,N=0..15):
> display(c,view=[0..7,0..12]);
```



Solutionnaire
Problèmes de synthèse

Chapitre 1 (page 53)

1. a)

x	$f(x)$
0,001	2,995 509
10^{-5}	2,999 955
10^{-7}	2,999 9996
10^{-9}	0
10^{-13}	0
10^{-15}	0

b) Non

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ $\left(\text{ind. } \dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{3}{1+3x}}{1} = 3$$

d) À partir d'une certaine valeur, voisine de zéro, la calculatrice (ou l'outil technologique) considère $x = 0$ dans le calcul de $\ln(1 + 3x)$. Ainsi le numérateur devient $\ln 1 = 0$, d'où la réponse 0.

2. a)

$$\begin{aligned}
x^{\sin y} &= \ln(x^2+1)\\
\ln x^{\sin y} &= \ln\left(\ln(x^2+1)\right)\\
\sin y \ln x &= \ln\left(\ln(x^2+1)\right)\\
(\sin y \ln x)' &= \left[\ln\left(\ln(x^2+1)\right)\right]'\\
(\cos y)y' \ln x + \sin y\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{\ln(x^2+1)}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)2x
\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)} - \dfrac{\sin y}{x}}{\cos y \ln x}$

b)

$$\begin{aligned}
y^x &= \left(\frac{x}{y}\right)^3\\
\ln(y^x) &= \ln\left(\frac{x}{y}\right)^3\\
x\ln y &= 3\ln\left(\frac{x}{y}\right)\\
(x\ln y)' &= \left(3(\ln x - \ln y)\right)'\\
\ln y + \frac{xy'}{y} &= 3\left(\frac{1}{x} - \frac{y'}{y}\right)\\
\frac{xy'}{y} + \frac{3y'}{y} &= \frac{3}{x} - \ln y\\
y'\left(\frac{x+3}{y}\right) &= \frac{3 - x\ln y}{x}
\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(3 - x\ln y)}{x(x+3)}$

c)

$$\begin{aligned}
y &= x^{\sin x}(\cos x)^x\\
\ln y &= \ln\left[x^{\sin x}(\cos x)^x\right]\\
\ln y &= \ln x^{\sin x} + \ln(\cos x)^x\\
\ln y &= \sin x \ln x + x\ln(\cos x)\\
(\ln y)' &= \left(\sin x\ln x + x\ln(\cos x)\right)'\\
\frac{y'}{y} &= \cos x \ln x + \sin x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(\cos x) + x\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}(\cos x)^x\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x} + \ln(\cos x) - x\tan x\right)$$

d)

$$\begin{aligned}
y &= x^{2x} + (3x+1)^{5x}\\
y' &= \left(x^{2x} + (3x+1)^{5x}\right)'\\
&= (x^{2x})' + \left((3x+1)^{5x}\right)'
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
u &= x^{2x}\\
\ln u &= \ln x^{2x}\\
\ln u &= 2x\ln x\\
(\ln u)' &= (2x\ln x)'\\
\frac{1}{u}u' &= 2\ln x + 2x\left(\frac{1}{x}\right)\\
u' &= x^{2x}(2\ln x + 2)
\end{aligned}$$

donc $(x^{2x})' = 2x^{2x}(1 + \ln x)$

Soit

$$\begin{aligned}
v &= (3x+1)^{5x}\\
\ln v &= \ln(3x+1)^{5x}\\
\ln v &= 5x\ln(3x+1)\\
(\ln v)' &= \left(5x\ln(3x+1)\right)'\\
\frac{1}{v}v' &= 5\ln(3x+1) + 5x\left(\frac{3}{3x+1}\right)\\
v' &= (3x+1)^{5x}\left[5\ln(3x+1) + \frac{15x}{3x+1}\right]
\end{aligned}$$

donc $\left((3x+1)^{5x}\right)' = 5(3x+1)^{5x}\left[\ln(3x+1) + \dfrac{3x}{3x+1}\right]$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{2x}(1+\ln x) + 5(3x+1)^{5x}\left[\ln(3x+1) + \frac{3x}{3x+1}\right]$$

3. a) Calculons d'abord y'.

$$(\text{Arc}\sin y + \text{Arc}\tan x)' = (2xy + \pi)'$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{4}{1+x^2} = 2y + 2xy'$$

d'où $y' = \dfrac{2y - \dfrac{4}{1+x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2x}$

$m_{\tan}$ au point $(1, 0) = y'_{(1,0)} = 2$

Puisque la droite $y = 2x + b$ passe par P(1, 0), nous trouvons $b = -2$

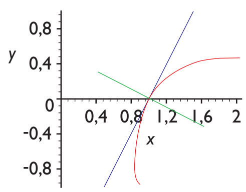
d'où l'équation de la droite tangente est $y = 2x - 2$

m_{normale} au point (1, 0) $= \dfrac{-1}{y'_{(1,\,0)}} = \dfrac{-1}{2}$

Puisque la droite $y = \dfrac{-1}{2}x + b$ passe par P(1, 0), nous trouvons $b = \dfrac{1}{2}$

d'où l'équation de la droite normale est $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b)
```
> with(plots):
> c:=implicitplot(arcsin(y)+4*arctan
  (x)=2*x*y*+Pi,x=0..2,y=-1..1,color=red):
> t:=plot(2*x-2,x=0..2,y=-1..1,color=blue):
> n:=plot((-x+1)/2,x=0.4..1.6,y=-1..1,
  color=green):
> display(c,t,n,scaling=constrained);
```



4. a)

$$
\begin{aligned}
(x^2 + y^2)^2 &= x^2 - y^2 \quad ① \\
\left((x^2 + y^2)^2\right)' &= (x^2 + y^2)' \\
2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') &= 2x - 2yy' \\
2x^3 + 2x^2yy' + 2xy^2 + 2y^3y' &= x - yy' \\
y'[2x^2y + 2y^3 + y] &= x - 2x^3 - 2xy^2 \\
y' &= \frac{x - 2x^3 - 2xy^2}{2x^2y + 2y^3 + y}
\end{aligned}
$$

Ainsi $y' = \dfrac{x(1 - 2x^2 - 2y^2)}{y(2x^2 + 2y^2 + 1)}$

La tangente à la courbe est horizontale lorsque $y' = 0$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
x(1 - 2x^2 - 2y^2) &= 0 \\
1 - 2x^2 - 2y^2 &= 0 \\
&\text{ou } x = 0 \text{ (à rejeter, car si } x = 0,\ y = 0) \\
2x^2 + 2y^2 &= 1
\end{aligned}
$$

$x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$, ainsi $y^2 = \dfrac{1}{2} - x^2$

En substituant dans ①, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\left(x^2 + \frac{1}{2} - x^2\right)^2 &= x^2 - \left(\frac{1}{2} - x^2\right) \\
\frac{1}{4} &= 2x^2 - \frac{1}{2} \\
x^2 &= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

donc $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{8}}$

En substituant dans $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons

$y^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{8}$

donc $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{8}}$

Les points cherchés sont

$A\left(\sqrt{\dfrac{3}{8}}, \sqrt{\dfrac{1}{8}}\right)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{3}{8}}, -\sqrt{\dfrac{1}{8}}\right)$, $C\left(-\sqrt{\dfrac{3}{8}}, \sqrt{\dfrac{1}{8}}\right)$

et $D\left(-\sqrt{\dfrac{3}{8}}, -\sqrt{\dfrac{1}{8}}\right)$

b) Algébriquement, nous constatons que la tangente est verticale lorsque $y = 0$.

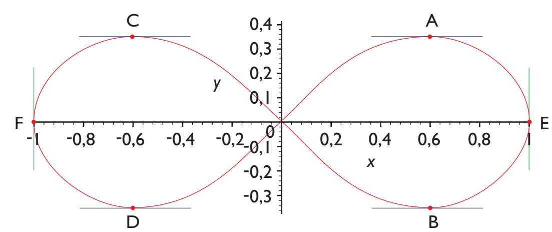
En substituant $y = 0$ dans ①, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 0)^2 &= x^2 - 0^2 \\
x^4 - x^2 &= 0 \\
x^2(x^2 - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

donc $x = -1$, $x = 1$ ou $x = 0$ (à rejeter)

Les points cherchés sont E(1, 0) et F(-1, 0).

c)
```
> with(plots):
> c:=implicitplot((x^2+y^2)^2=x^2-y^2,x=-1..1,
  y=-1..1,color=red,numpoints=1000):
> y1:=plot((1/8)^(1/2),x=-0.9..-0.3,color=blue):
> y2:=plot((1/8)^(1/2),x=0.3..0.9,color=blue):
> y3:=plot(-(1/8)^(1/2),x=-0.9..-0.3,color=blue):
> y4:=plot(-(1/8)^(1/2),x=0.3..0.9,color=blue):
> x1:=plot([1,y,y=-0.3..0.3],color=green):
> x2:=plot([-1,y,y=-0.3..0.3],color=green):
> y5:=plot(0.4,x=-1..1,color=white):
> p:=plot([[(3/8)^(1/2),(1/8)^(1/2)],[(3/8)^(1/2),-(1/8)^
  (1/2)],[-(3/8)^(1/2),(1/8)^(1/2)],[-(3/8)^(1/2),-(1/8)^
  (1/2)],[1,0],[-1,0]],style=point,symbol=circle,color=red):
> display(c,y1,y2,y3,y4,x1,x2,p,y5,scaling=constrained);
```



5. a) Calculons d'abord y'.

$$
\begin{aligned}
(x^3 + y^3)' &= (3axy)' \\
3x^2 + 3y^2y' &= 3ay + 3axy' \\
3y^2y' - 3axy' &= 3ay - 3x^2 \\
y'(y^2 - ax) &= ay - x^2 \\
y' &= \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}
\end{aligned}
$$

La tangente à la courbe est horizontale lorsque $y' = 0$, c'est-à-dire $(ay - x^2) = 0$, ainsi $y = \dfrac{x^2}{a}$.

En remplaçant y par $\dfrac{x^2}{a}$, dans l'équation initiale, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
x^3 + \frac{x^6}{a^3} &= 3x^3 \\
x^3\left(1 + \frac{x^3}{a^3}\right) &= 3x^3 \\
\text{si } x \neq 0 \quad \left(1 + \frac{x^3}{a^3}\right) &= 3
\end{aligned}
$$

donc $x = \sqrt[3]{2}a$ et $y = \sqrt[3]{4}a$ (car $y = x^2$)

d'où la tangente est horizontale au point $P\left(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a\right)$

La tangente à la courbe est verticale lorsque $(y^2 - ax) = 0$, ainsi $x = \dfrac{y^2}{a}$.

En remplaçant x par $\dfrac{y^2}{a}$ dans l'équation initiale, nous obtenons

$$\frac{y^6}{a^3} + y^3 = 3y^3$$
$$y^3\left(\frac{y^3}{a^3} + 1\right) = 3y^3$$

si $y \neq 0$ $\quad \left(\dfrac{y^3}{a^3} + 1\right) = 3$

donc $y = \sqrt[3]{2}a$ et $x = \sqrt[3]{4}a$ $\qquad$ (car $x = y^2$)

d'où la tangente est verticale au point $Q\left(\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a\right)$

b) Lorsque $x = y$ et que $x \neq 0$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=y} = \frac{x - x^2}{x^2 - x} = -1$$

De plus, en remplaçant x par y dans l'équation initiale, nous obtenons

$$x^3 + x^3 = 3ax^2$$
$$2x^3 - 3ax^2 = 0$$
$$x^2(2x - 3a) = 0$$

$x = 0$ (à rejeter) ou $x = \dfrac{3a}{2}$

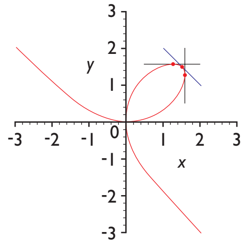
Le point d'intersection du folium de Descartes et de la droite $y = x$ lorsque $x \neq 0$ est $R\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$.

Équation de la tangente $\dfrac{y - \frac{3a}{2}}{x - \frac{3a}{2}} = -1$

$$y - \frac{3a}{2} = -1\left(x - \frac{3a}{2}\right)$$

d'où $y = -x + 3a$

c)
```
> with(plots):
> folium:=implicitplot(x^3+y^3=3*x*y,x=-3..3,
  y=-3..3,numpoints=8000,view=[-3..3,-3..3],color=orange):
> y1:=plot(4^(1/3),x=0.5..2,color=black):
> x1:=plot([4^(1/3),y,y=0.5..2],color=black):
> t:=plot(-x+3,x=1..2,color=blue):
> P:=plot([[4^(1/3),2^(1/3)],[2^(1/3),4^(1/3)],[3/2,3/2]],
  style=point,symbol=circle,color=orange):
> display(folium,y1,x1,t,P,scaling=constrained);
```



6. $(xy^3 + y)^2 = x^2 + 16$

Calculons d'abord y'.

$$\left((xy^3 + y)^2\right)' = (x^2 + 16)'$$
$$2(xy^3 + y)(y^3 + 3xy^2y' + y') = 2x$$
$$y^3 + 3xy^2y' + y' = \frac{x}{xy^3 + y}$$
$$y'(3xy^2 + 1) = \frac{x}{xy^3 + y} - y^3$$
$$y'(3xy^2 + 1) = \frac{x - xy^6 - y^4}{xy^3 + y}$$

ainsi $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - xy^6 - y^4}{(3xy^2 + 1)(xy^3 + y)}$

En remplaçant x par 0, dans l'équation initiale, nous obtenons $(0 + y)^2 = 0 + 16$, donc $y = -4$ ou $y = 4$

Ainsi $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,-4)} = 64$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,4)} = -64$

Équation de la droite perpendiculaire à la courbe au point (0, -4)

$$\frac{y - (-4)}{x - 0} = \frac{-1}{64}$$
$$y_1 = \frac{-1}{64}x - 4$$

Équation de la droite perpendiculaire à la courbe au point (0, 4)

$$\frac{y - 4}{x - 0} = \frac{1}{64}$$
$$y_2 = \frac{1}{64}x + 4$$

Nous trouvons l'intersection des deux droites en résolvant

$$y_1 = y_2$$
$$\frac{-1}{64}x - 4 = \frac{1}{64}x + 4$$
$$\frac{2}{64}x = -8$$
$$x = -256$$

Lorsque $x = -256$, $y = 0$

D'où nous obtenons le point $R(-256, 0)$

7. $x^2 - 2x - xy + 2y^2 + y = 27$

a) Calculons d'abord y'.

$$(x^2 - 2x - xy + 2y^2 + y)' = (27)'$$
$$2x - 2 - y - xy' + 4yy' + y' = 0$$
$$-xy' + 4yy' + y' = -2x + 2 + y$$
$$y'(4y - x + 1) = y - 2x + 2$$

ainsi $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 2x + 2}{4y - x + 1}$

Déterminons les valeurs de x telles que $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{y - 2x + 2}{4y - x + 1} = 0 \text{ si } y = 2x - 2$$

En remplaçant y par $(2x - 2)$ dans l'équation initiale, nous obtenons

$$x^2 - 2x - x(2x - 2) + 2(2x - 2)^2 + (2x - 2) = 27$$
$$x^2 - 2x - 2x^2 + 2x + 8x^2 - 16x + 8 + 2x - 2 - 27 = 0$$
$$7x^2 - 14x - 21 = 0$$
$$7(x - 3)(x + 1) = 0$$

ainsi $x = 3$ ou $x = -1$

En remplaçant x par 3, nous obtenons $y = 2(3) - 2 = 4$ et nous avons le point A(3, 4).

En remplaçant x par -1, nous obtenons $y = 2(-1) - 2 = -4$ et nous avons le point B(-1, -4).

Calculons $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{y - 2x + 2}{4y - x + 1}\right)'$

$$= \frac{(y' - 2)(4y - x + 1) - (y - 2x + 2)(4y' - 1)}{(4y - x + 1)^2}$$

Calculons $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ aux points A(3, 4) et B(-1, -4)

sachant que $y'(3, 4) = 0$ et $y'(-1, -4) = 0$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(3,\,4)} = \frac{(0 - 2)(14) - (0)(0 - 1)}{(14)^2} = \frac{-1}{7} < 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(-1,\,-4)} = \frac{(0 - 2)(-14) - (0)(0 - 1)}{(14)^2} = \frac{1}{7} > 0$$

Puisque $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(3,\,4)} = 0$ et que $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{(3,\,4)} < 0$,

le point A(3, 4) est le point de maximum.

Puisque $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(-1,\,-4)} = 0$ et que $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{(-1,\,-4)} > 0$,

le point B(-1, -4) est le point de minimum.

b) En posant le dénominateur de $\dfrac{dy}{dx}$ égal à 0, nous obtenons

$$4y - x + 1 = 0$$

donc $\quad x = 4y + 1$

En remplaçant x par $4y + 1$ dans l'équation initiale, nous obtenons

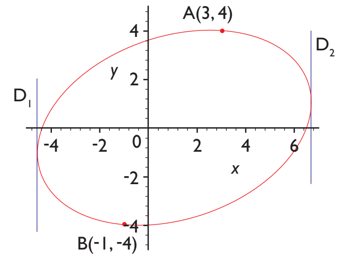
$$(4y + 1)^2 - 2(4y + 1) - (4y + 1)y + 2y^2 + y = 27$$
$$16y^2 + 8y + 1 - 8y - 2 - 4y^2 - y + 2y^2 + y - 27 = 0$$
$$14y^2 - 28 = 0$$
$$14(y^2 - 2) = 0$$

donc $y = -\sqrt{2}$ ou $y = \sqrt{2}$

ainsi $x = -4\sqrt{2} + 1$ ou $x = 4\sqrt{2} + 1$

D'où D_1: $x = -4\sqrt{2} + 1$ et D_2: $x = 4\sqrt{2} + 1$

c)
```
> with(plots):
> c:=implicitplot(x^2+2*y^2-x*y-2*x+y=27,x=-6..7,y=-5..5):
> p:=plot([[-1,-4],[3,4]],symbol=circle,style=point,color=red):
> d1:=plot([1+4*(2)^(1/2),y,y=-2..4],color=blue):
> d2:=plot([1-4*(2)^(1/2),y,y=-4..2],color=blue):
> display(c,p,d1,d2,scaling=constrained,view=[-5..7,-5..5]);
```



8. $x - y^2 + 4y = 7$

a) Calculons y'.

$$(x - y^2 + 4y)' = (7)'$$
$$1 - 2yy' + 4y' = 0$$
$$y'(-2y + 4) = -1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 4}$$

En remplaçant x par 7 dans l'équation initiale, nous obtenons

$$7 - y^2 + 4y = 7$$
$$-y^2 + 4y = 0$$
$$y(-y + 4) = 0$$

donc $y = 0$ ou $y = 4$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,\,0)} = \frac{-1}{4} \text{ et } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,\,4)} = \frac{1}{4}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{-1}{4}, \text{ ainsi } \theta_1 = -14{,}036\ldots°$$

$$\tan\theta_2 = \frac{1}{4}, \text{ ainsi } \theta_2 = 14{,}036\ldots°$$

d'où $\theta \approx 28{,}07°$

b) En posant $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y - 4} = 1$, nous trouvons $y = 2{,}5$.

En posant $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y - 4} = -1$, nous trouvons $y = 1{,}5$.

En remplaçant successivement y par 2,5 et y par 1,5 dans l'équation initiale, nous obtenons

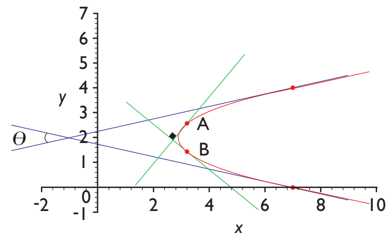
$x - (2{,}5)^2 + 4(2{,}5) = 7$, donc $x = 3{,}25$

$x - (1{,}5)^2 + 4(1{,}5) = 7$, donc $x = 3{,}25$

D'où les points cherchés sont A(3,25 ; 2,5) et B(3,25 ; 1,5)

Représentation graphique :

```
> with(plots):
> c:=implicitplot(x-y^2+4*y=7,x=-1..10,y=-1..7,
  color=orange):
> t1:=plot((7-x)/4,x=-2..9,color=blue):
> t2:=plot(4+(x-7)/4,x=-2..9,color=blue):
> t3:=plot(x-0.75,x=1..6,color=green):
> t4:=plot(-x+4.75,x=1..9,color=green):
> P:=plot([[7,0],[7,4],[3.25,2.5],[3.25,1.5]],symbol=circle,
  style=point,color=orange):
> display(c,t1,t2,t3,t4,P,view=[-2..10,-1..7],
  scaling=constrained);
```



9. dom $f =]0, +\infty$

Asymptotes : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ est une indétermination de la forme 0^0.

Soit $A = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} x \ln x \quad (\text{ind. } 0 \cdot (-\infty))$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

$\ln A = 0$

d'où $A = 1$

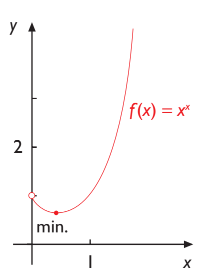
Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$, alors il n'y a pas d'asymptote verticale.

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} x^x = +\infty$, alors il n'y a pas d'asymptote horizontale.

$f'(x) = x^x(1 + \ln x)$; n.c. : $\dfrac{1}{e}$

$f''(x) = x^x(1 + x)^2 + x^{x-1}$; aucun nombre critique.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	∄	−	0	+	
$f''(x)$	∄	+	+	+	
f	∄	↘∪	0,69…	↗∪	$+\infty$
E de G		↘	(0,36… ; 0,69…)	↗	
			min.		



10. a) Soit $H(x) = x - 1 + \tan x$.

H est continue sur $[0, 1]$; $H(0) = -1$ et $H(1) \approx 0{,}017$.

Puisque $H(0) < 0 < H(1)$, alors $\exists\, c \in\ ]0, 1[$ tel que $H(c) = 0$

c'est-à-dire $H(c) = c - 1 + \tan c = 0$

d'où $\exists\, c \in\ ]0, 1[$ tel que $\tan c = 1 - c$

b) Vérifions d'abord les hypothèses du théorème de Rolle :

où $f(x) = (x - 1)\sin x$ sur $[0, 1]$.

1) f est continue sur $[0, 1]$;

2) f est dérivable sur $]0, 1[$,
car $f'(x) = \sin x + (x - 1)\cos x$ est définie sur $]0, 1[$;

3) $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$, d'où $f(0) = f(1)$

Alors $\exists\, c \in\ ]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$

c'est-à-dire

$$\sin c + (c - 1)\cos c = 0$$
$$\sin c = -(c - 1)\cos c$$
$$\frac{\sin c}{\cos c} = 1 - c \ (\text{car } \cos c \neq 0 \text{ sur }]0, 1[)$$

d'où $\exists\, c \in\ ]0, 1[$ tel que $\tan c = 1 - c$

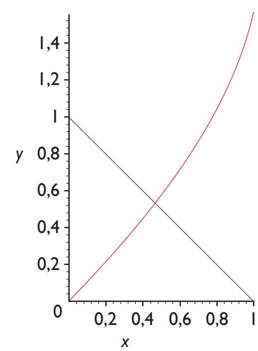
c) > f:=x->tan(x);

$$f := x \to \tan(x)$$

> g:=x->(1-x);

$$g := x \to 1 - x$$

> plot([f(x),g(x)],x=0..1,color=[red,blue],scaling=constrained);

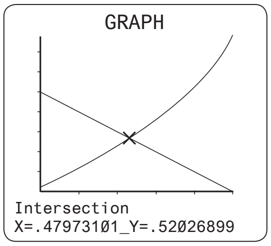


> c:=fsolve(f(x)=g(x));

$$c := 0.4797310073$$

```
Plot1  Plot2  Plot3
\Y1■tan(X)
\Y2■1-X
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=Ø
Xmax=1
Xscl=.2
Ymin=Ø
Ymax=1.6
Yscl=.2
Xres=1
```



11. a) Appliquons le théorème de Lagrange à $x(t)$ sur $[0, 4]$.

$\exists\, c \in\ ]0, 4[$ tel que

$$\frac{x(4) - x(0)}{4 - 0} = x'(c)$$
$$8 = 12c - 3c^2$$
$$3c^2 - 12c + 8 = 0$$
$$c = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6}$$

d'où $t_1 \approx 0{,}85$ s ou $t_2 \approx 3{,}15$ s

b) $v(t) = x'(t) = 12t - 3t^2$

$v'(t) = 0$ si $12 - 6t = 0$ d'où $t = 2$ s

$v'(2) = 0$ et $v''(2) = -6 < 0$

donc la vitesse est maximale lorsque $t = 2$ s,
et $v_{max} = v(2) = 12$ m/s.

c) > x:=t->6*t^2-t^3+4;

$$x := t \rightarrow 6t^2 - t^3 + 4$$

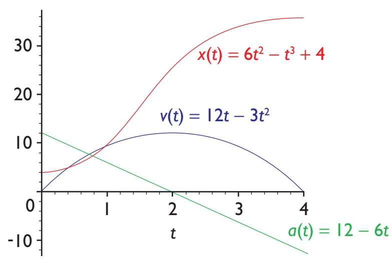
> v:=t->12*t-3*t^2;

$$v := t \rightarrow 12t - 3t^2$$

> a:=t->12-6*t;

$$a := t \rightarrow 12 - 6t$$

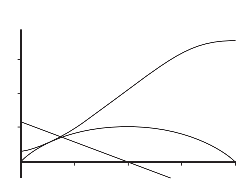
> plot([x(t),v(t),a(t)],t=0..4,color=[red,blue,green]);




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=6X²-X^3+4
\Y2=12-3X²
\Y3=12-6X
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=40
Yscl=10
Xres=1
```

GRAPH



12. a) $f(x) = (x - a)^m (x - b)^n$

$$f'(x) = m(x - a)^{m-1}(x - b)^n + n(x - b)^{n-1}(x - a)^m$$
$$f'(x) = (x - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}(m(x - b) + n(x - a))$$
$$f'(c) = (c - a)^{m-1}(c - b)^{n-1}(m(c - b) + n(c - a))$$

$\exists\, c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$, ainsi

$$m(c - b) + n(c - a) = 0$$
$$n(c - a) = m(b - c)$$
$$\frac{c - a}{b - c} = \frac{m}{n}$$

b) $$\frac{c - 4}{10 - c} = \frac{6}{3}$$
$$c - 4 = 20 - 2c$$
$$3c = 24$$
$$c = 8$$

13. $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 = 15x^2(x - 2)(x + 2)$; n.c. : 0, -2 et 2

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
f	↗	64	↘	0	↘	-64	↗
		max.				min.	

1) f est continue sur $[-2, 2]$, fonction polynomiale

2) f est dérivable sur $]-2, 2[$, car $f'(x) = 15x^4 - 60x^2$ est définie sur $]-2, 2[$

d'où $\exists\, c \in\ ]-2, 2[$ tel que

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = f'(c)$$
$$\frac{-64 - 64}{4} = 15c^4 - 60c^2$$
$$15c^4 - 60c^2 + 32 = 0$$

$$c^2 = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4(15)(32)}}{2(15)} = \frac{60 \pm \sqrt{1680}}{30} = \frac{30 \pm 2\sqrt{105}}{15}$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{30 \pm 2\sqrt{105}}{15}}$$

d'où $c_1 = -\sqrt{\dfrac{30 - 2\sqrt{105}}{15}} \approx -0{,}796$

$c_2 = -\sqrt{\dfrac{30 + 2\sqrt{105}}{15}} \approx -1{,}835$

$c_3 = \sqrt{\dfrac{30 - 2\sqrt{105}}{15}} \approx 0{,}796$

et $c_4 = \sqrt{\dfrac{30 + 2\sqrt{105}}{15}} \approx 1{,}835$

14. $h(x) = 0{,}006x^2 - 0{,}1x + 9$

a) La distance maximale D entre la corde rectiligne reliant le sommet des deux poteaux et le télésiège peut être calculée en utilisant la valeur c du théorème de Lagrange.

1) h est continue sur $[0, 100]$, car h est une fonction polynomiale

2) h est dérivable sur $]0, 100[$, car $h'(x) = 0{,}012x - 0{,}1$ est définie sur $]0, 100[$

d'où $\exists\ c \in\ ]0, 100[$ tel que

$$\frac{h(100) - h(0)}{100 - 0} = h'(c)$$

$$\frac{59 - 9}{100} = 0{,}012c - 0{,}1$$

$$c = 50$$

Équation de la sécante y passant par $(0, h(0))$ et $(100, h(100))$

$$\frac{y - h(0)}{x - 0} = \frac{h(100) - h(0)}{100 - 0}$$

$$\frac{y - 9}{x} = \frac{59 - 9}{100}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 9$$

$$D = y(50) - h(50)$$

$$= 34 - 19$$

d'où $D = 25$ mètres

b) $d(x) = h(x) - \dfrac{14}{100}x$

$$= (0{,}006x^2 - 0{,}1x + 9) - 0{,}14x$$

$$= 0{,}006x^2 - 0{,}24x + 9$$

$d'(x) = 0{,}012x - 0{,}24$

$d'(x) = 0$ si $x = 20$

x	0		20		100
$d'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$
d	$d(0)$	↘	6,6	↗	$d(100)$
	max.		min.		max.

d'où $d = 6{,}6$ mètres

c) Nous savons que $\dfrac{dx}{dt} = 1{,}8$ m/s

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dx}(0{,}006x^2 - 0{,}1x + 9)\frac{dx}{dt}$$

ainsi $\dfrac{dh}{dt} = (0{,}012x - 0{,}1)(1{,}8)$

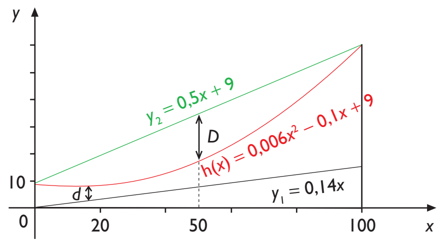
i) $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{x=5} = \big(0{,}012(5) - 0{,}1\big)(1{,}8) = -0{,}072$ m/s

ii) $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{x=95} = \big(0{,}012(95) - 0{,}1\big)(1{,}8) = 1{,}872$ m/s

d)
```
> with(plots):
> h:=x->0.006*x^2-0.1*x+9;
```

$$h := x \rightarrow 0.006x^2 - 0.1x + 9$$

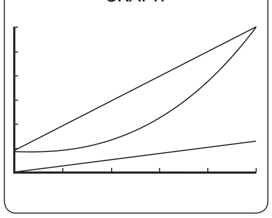
```
> y1:=plot(h(x),x=0..100,y=0..60,color=orange):
> d1:=plot([20,y,y=2.8..h(20)],color=blue):
> d2:=plot([50,y,y=h(50)..34],color=blue):
> p1:=plot([100,y,y=0..h(100)],color=black,thickness=3):
> p2:=plot([0,y,y=0..h(0)],color=black,thickness=3):
> s:=plot(0.5*x+9,x=0..100,color=green):
> sol:=plot(0.14*x,x=0..100,color=black,thickness=2):
> display(y1,d1,d2,s,p1,p2,sol,scaling=constrained);
```




```
Plot1  Plot2  Plot3
\Y1=Ø.ØØ6X²-Ø.1X+9
\Y2=Ø.5X+9
\Y3=Ø.14X
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=Ø
Xmax=1ØØ
Xscl=2Ø
Ymin=-1Ø
Ymax=6Ø
Yscl=1Ø
Xres=1
```

GRAPH



15. $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)' = (C)'$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0\text{, ainsi } y' = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \text{ et } y'_{(a,\,d)} = \frac{-\sqrt{d}}{\sqrt{a}}$$

L'équation de la tangente au point (a, c), c'est-à-dire $\left(a, \left(C - \sqrt{a}\right)^2\right)$ est $y = \dfrac{-\left(C - \sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}x + b$ qui passe par $\left(a, \left(C - \sqrt{a}\right)^2\right)$

Ainsi $\left(C - \sqrt{a}\right)^2 = \dfrac{-\left(C - \sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}a + b$ d'où $b = C^2 - C\sqrt{a}$

L'équation de la tangente est donc

$$y = \frac{-\left(C - \sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}x + \left(C^2 - C\sqrt{a}\right)$$

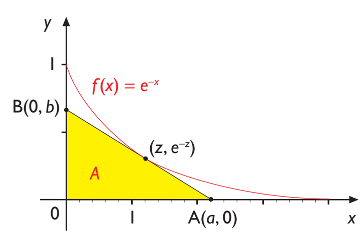
si $x = 0$, $y = C^2 - C\sqrt{a}$ ainsi $r = C^2 - C\sqrt{a}$

si $y = 0$, $x = C\sqrt{a}$ ainsi $s = C\sqrt{a}$

$r + s = C^2 - C\sqrt{a} + C\sqrt{a} = C^2$

d'où $k = 4$

16. a) Déterminons d'abord l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(z, f(z))$.



1

$$\frac{y - f(z)}{x - z} = f'(z)$$

$$\frac{y - e^{-z}}{x - z} = -e^{-z} \quad \left(f'(x) = -e^{-x}\right)$$

ainsi $y = -e^{-z}(x - z) + e^{-z}$

$y = -e^{-z}x + e^{-z}(z + 1)$

Déterminons les coordonnées des points A$(a, 0)$ et B$(0, b)$.

si $x = 0$, $y = e^{-z}(z + 1)$, d'où B$\left(0, e^{-z}(z + 1)\right)$

si $y = 0$, $x = z + 1$, d'où A$(z + 1, 0)$

$$\text{Aire du triangle AOB} = \frac{ab}{2} = \frac{(z+1)e^{-z}(z+1)}{2}$$

$$A(z) = \frac{(z+1)^2 e^{-z}}{2}$$

$$A'(z) = \frac{2(z+1)e^{-z} - (z+1)^2 e^{-z}}{2}$$

$$= \frac{(z+1)e^{-z}(1 - z)}{2}$$

$A'(z) = 0$ si $z = 1$

z	0		1	$+\infty$
$A'(z)$	$\nexists$	+	0	−
A	$A(0)$	↗	$A(1)$	↘
	min.		max.	

D'où $A_{\max} = A(1) = \dfrac{2}{e}$ u^2 et P$\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} A(z) = \lim_{z\to+\infty} \frac{(z+1)^2 e^{-z}}{2}$ $\quad$ (ind. $(+\infty)\cdot 0$)

$$= \lim_{z\to+\infty} \frac{(z+1)^2}{2e^z} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{z\to+\infty} \frac{2(z+1)}{2e^z} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{e^z}$$

$$= 0$$

17. a) Soit $f(x) = \text{Arc tan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ si $x \neq 1$

et $g(x) = \text{Arc tan}\, x$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\frac{2}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ainsi $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty$, il y a deux cas à étudier.

1er cas : Si $x \in -\infty, 1[$

D'après le corollaire 2 du théorème de Lagrange, $\exists\, C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = g(x) + C_1$$

$$\text{Arc tan}\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = \text{Arc tan}\, x + C_1$$

En remplaçant x par 0, car $0 \in -\infty, 1[$, nous obtenons

$$\text{Arc tan}\,(1) = \text{Arc tan}\, 0 + C$$

$$\frac{\pi}{4} = 0 + C_1$$

d'où $C_1 = \dfrac{\pi}{4}$

2e cas : Si $x \in\,]1, +\infty$

D'après le corollaire 2 du théorème de Lagrange,

$\exists\, C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = g(x) + C_2$$

$$\text{Arc tan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{Arc tan}\, x + C_2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (\text{Arc tan}\, x + C_2)$$

$$\text{Arc tan}\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \text{Arc tan}\, x + C_2$$

En appliquant la RH au membre de gauche, nous obtenons

$$\text{Arc tan}\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{-1}\right)\right] = \frac{\pi}{2} + C_2$$

$$\text{Arc tan}\,(-1) = \frac{\pi}{2} + C_2$$

$$\frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + C_2$$

d'où $C_2 = \dfrac{-3\pi}{4}$

b) $f(x) = \text{Arc tan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \text{Arc tan}\, x$

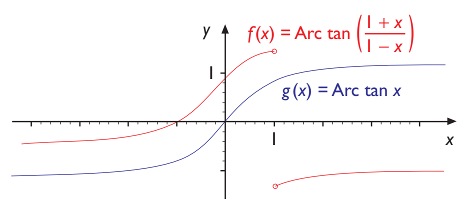
```
> f:=x->arctan((1+x)/(1-x));
```

$$f := x \to \text{Arc tan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

```
> g:=x->arctan(x);
```

$$g := x \to \text{Arc tan}\,(x)$$

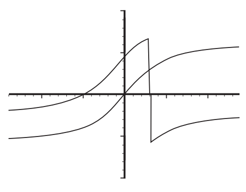
```
> with(plots):
> c1:=plot(f(x),x=-8..8,color=orange,discont=true):
> c2:=plot(g(x),x=-8..8,color=blue):
> display(c1,c2,scaling=constrained);
```



```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=tan-1((1+X)/
(1-X))
\Y2=tan-1(X)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-5
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=.5
Xres=1
```

GRAPH



18. a) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{(5\theta^2+7)\sin 3\theta}{\theta e^\theta}\qquad\left(\text{ind. }\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{(5\theta^2+7)\sin 3\theta}{\theta e^\theta}=\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{5\theta^2+7}{e^\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{\theta}\right)$$

$$=7\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{\theta}\right)\qquad\left(\text{ind. }\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=}7\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{3\cos 3\theta}{1}\right)$$

$$=21$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\tan x}{x}+x\ln x\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}+\lim_{x\to 0^+}x\ln x$

$$\left(\text{ind. }\frac{0}{0}\text{ et ind. }0\cdot(-\infty)\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x}{1}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$=1+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\qquad\left(\text{ind. }\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=}1+\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$=1+\lim_{x\to 0^+}(-x)$$

$$=1+0$$

$$=1$$

c) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(1+\frac{t}{e^t}\right)}{(2t+\ln t)}=\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{2t+\ln t}\right)\left(1+\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}\right)$

$$\left(\text{ind. }\frac{+\infty}{+\infty}\text{ et ind. }\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=}\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{t}}\right)\left(1+\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)(1+0)$$

$$=\frac{1}{2}$$

d) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s+\sqrt{s}}{s-\sqrt{s}}\right)\qquad\left(\text{ind. }\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{s+\sqrt{s}}{s-\sqrt{s}}\overset{\text{RH}}{=}\lim_{s\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{s}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{s}}}=1$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s+\sqrt{s}}{s-\sqrt{s}}\right)^{\sqrt{s}}\qquad(\text{ind. }1^{+\infty})$

Si $\displaystyle A=\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s+\sqrt{s}}{s-\sqrt{s}}\right)^{\sqrt{s}}$

alors $\displaystyle\ln A=\lim_{s\to+\infty}\ln\left(\frac{s+\sqrt{s}}{s-\sqrt{s}}\right)^{\sqrt{s}}$

$$\ln A=\lim_{s\to+\infty}\sqrt{s}\ln\left(\frac{s+\sqrt{s}}{s-\sqrt{s}}\right)\qquad(\text{ind. }(+\infty)\cdot 0)$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\frac{\ln\left(s+\sqrt{s}\right)-\ln\left(s-\sqrt{s}\right)}{\frac{1}{\sqrt{s}}}\qquad\left(\text{ind. }\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=}\lim_{s\to+\infty}\frac{\dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{s}}}{s+\sqrt{s}}-\dfrac{1-\frac{1}{2\sqrt{s}}}{s-\sqrt{s}}}{\dfrac{-1}{2s^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\frac{\left[\left(s-\sqrt{s}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{s}}\right)-\left(s+\sqrt{s}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{s}}\right)\right]2s^{\frac{3}{2}}}{(s^2-s)(-1)}$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\frac{\left[s+\frac{\sqrt{s}}{2}-\sqrt{s}-\frac{1}{2}-s+\frac{\sqrt{s}}{2}-\sqrt{s}+\frac{1}{2}\right]2s^{\frac{3}{2}}}{s(1-s)}$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\frac{\left(-\sqrt{s}\right)2\sqrt{s}}{1-s}$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\frac{-2s}{1-s}\qquad\left(\text{ind. }\frac{-\infty}{-\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=}\lim_{s\to+\infty}2$$

$$=2$$

d'où $A=e^2$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}+\frac{e^{-x}}{\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arc}\tan x\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arc}\tan x\right)}$$

$$\left(\text{ind. }\frac{+\infty}{+\infty}\text{ et ind. }\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}}{\frac{-1}{1+x^2}}$$

$$= 0 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2}{e^x} \qquad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \qquad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x}$$

$$= 0$$

f) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{\cos 2x}{x} + x \sin\left(\frac{3}{x}\right)\right) e^{\frac{-5}{x}}\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos 2x}{x} + \lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right)\right] \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-5}{x}}\right)$$

$$= \left[0 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right] \cdot e^0 \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos\left(\frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{-3}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}\right] \cdot 1$$

$$= 3 \lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= 3(1)$$

$$= 3$$

g) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{5,831} + 1}{x^{\sqrt{34}}} \qquad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{5,831} + 1}{x^{\sqrt{34}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{5,831}\left(1 + \frac{1}{x^{5,831}}\right)}{x^{\sqrt{34}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{(5,831 - \sqrt{34})} \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^{5,831}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{0,000\,048\ldots}(1)$$

$$= +\infty$$

h) $$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad \left(\text{ind. } +\infty\left(1 - (+\infty) \cdot 0\right)\right)$$

Soit $x = \frac{1}{y}$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{x}$,

lorsque $x \to +\infty$, nous avons $y \to 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y^2}\left(1 - \frac{1}{y} \sin y\right)$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{y - \sin y}{y^3} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{1 - \cos y}{3y^2} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{6y} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos y}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

i) $$\lim_{x \to 0} \frac{5 \sin^4 3x}{2x^4} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \sin^4 3x}{2x^4} = \frac{5}{2} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 3x)^4}{x^4} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}\right)^4 \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \frac{5}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{3 \cos 3x}{1}\right)^4$$

$$= \frac{5}{2}(3)^4$$

$$= \frac{405}{2}$$

j) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x - \ln x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x e^{-\ln x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\ln x}}{e^x} \qquad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \qquad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x}$$

$$= 0$$

k) $$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \to a} \frac{\frac{2a^3 - 4x^3}{2\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aa^2}{3\sqrt[3]{(a^2x)^2}}}{\frac{-3ax^2}{4\sqrt[4]{(ax^3)^3}}}$$

$$= \frac{\frac{-2a^3}{2\sqrt{a^4}} - \frac{a^3}{3\sqrt[3]{a^6}}}{\frac{-3a^3}{4\sqrt[4]{a^{12}}}}$$

$$= \frac{-a - \frac{a}{3}}{\frac{-3}{4}}$$

$$= \frac{16a}{9}$$

19. a) $$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}, \text{ car } f(-1) = 0 \text{ et } g(-1) = 0\right)$$

$f'(-1) = m_{\tan(-1,\, f(-1))} = 2$ $\big($car $y_1 = 2x + 2$
est l'équation de la tangente au point $(-1, f(-1))\big)$

$g'(-1) = m_{\tan(-1,\, g(-1))} = -2$ $\big($car $y_2 = -2x - 2$
est l'équation de la tangente au point $(-1, g(-1))\big)$

Donc,

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{RH}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \frac{f'(-1)}{g'(-1)}$$

$$= \frac{2}{-2}$$

$$= -1$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}\quad\left(\text{ind. }\dfrac{0}{0}\text{, car } f(1)=0 \text{ et } g(1)=0\right)$

L'équation de la tangente à la courbe de f au point $(1, f(1))$ est

$$\frac{y_1 - f(1)}{x-1} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$
$$\frac{y_1 - 0}{x-1} = \frac{0-3}{1}$$
$$y_1 = -3x + 3$$

ainsi $m_{\tan(1,\, f(1))} = f'(1) = -3$

L'équation de la tangente à la courbe de g au point $(1, g(1))$ est

$$\frac{y_2 - g(1)}{x-1} = \frac{g(1)-g(0)}{1-0}$$
$$\frac{y_2 - 0}{x-1} = \frac{0-(-2)}{1}$$
$$y_2 = 2x - 2$$

ainsi $m_{\tan(1,\, g(1))} = g'(1) = 2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-3}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}\quad\left(\text{ind. }\dfrac{0}{0}\text{, car } f(2)=0 \text{ et } g(2)=0\right)$

$f'(2) = 0$, car la tangente à la courbe de f au point $(2, f(2))$ est horizontale.

$g'(2) = 0$, car la tangente à la courbe de g au point $(2, g(2))$ est horizontale.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad\left(\text{ind. }\frac{0}{0}\right)$$

d'où on ne peut pas évaluer $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

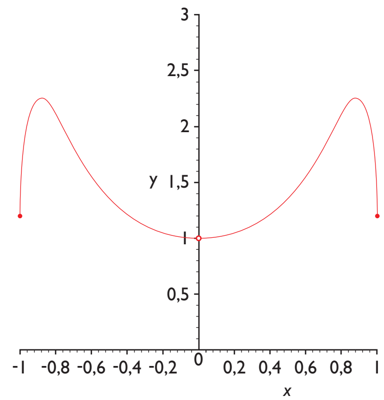
20. a)
```
> f:=x->(sin(tan(x))-tan(sin(x)))/(arcsin(arctan(x))-arctan(arcsin(x)));
```

$$f := x \to \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\text{arc sin}(\text{arc tan}(x)) - \text{arc tan}(\text{arc sin}(x))}$$

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\text{arc sin}(\text{arc tan}(x)) - \text{arc tan}(\text{arc sin}(x))} = 1$$

b)
```
> plot(f(x),x=-1..1,y=0..3,color=orange,discont=true);
```



21. $f(x) = [(x^2-4)^2]^{(x^2-2x)}$

a) $f(x) = 1$ si

1$^{\text{er}}$ cas : $(x^2-4)^2 = 1$ (base égale à 1)

$x^2 - 4 = 1$ ou $x^2 - 4 = -1$

$x^2 = 5$ ou $x^2 = 3$

ainsi $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

2$^{\text{e}}$ cas : $(x^2 - 2x) = 0$ et $(x^2-4)^2 \neq 0$

$x^2 - 2x = 0$ et $x^2 - 4 \neq 0$

$x(x-2) = 0$ et $(x-2)(x+2) \neq 0$

$x = 0$ ou $x = 2$ et $x \neq 2$ et $x \neq -2$

ainsi $x = 0$

d'où $f(x) = 1$ pour les valeurs de x suivantes : $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$

b) $g(x) = \begin{cases}[(x^2-4)^2]^{(x^2-2x)} & \text{si } x \neq 2\\ k & \text{si } x = 2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-4)^2]^{(x^2-2x)}\quad(\text{ind. } 0^0)$

Si $A = \lim\limits_{x\to 2}[(x^2-4)^2]^{(x^2-2x)}$, alors

$$\ln A = \lim_{x\to 2}\ln[(x^2-4)^2]^{(x^2-2x)}$$

$$\ln A = \lim_{x\to 2}(x^2-2x)\ln(x^2-4)^2\quad(\text{ind. } 0\cdot(-\infty))$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-4)^2}{\dfrac{1}{x^2-2x}}\quad\left(\text{ind. }\frac{-\infty}{\pm\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^2}}{\dfrac{-(2x-2)}{(x^2-2x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{4x}{x^2-4}\left(\frac{(x^2-2x)^2}{-(2x-2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{4x}{-(2x-2)}\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-2x)^2}{x^2-4}\quad\left(\text{ind. }\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \frac{8}{-2}\lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-2x)(2x-2)}{2x}$$

$$= -4(0)$$

$$= 0$$

1

ainsi $A = e^0 = 1$

d'où $a = 2$ et $k = 1$ et nous avons

$$g(x) = \begin{cases} [(x^2-4)^2]^{(x^2-2x)} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

22. a) $f(x) = \dfrac{2x^3+x-3}{x(x-1)^2}$, où dom $f = \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^3+x-3}{x(x-1)^2} = +\infty \,;\; \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3+x-3}{x(x-1)^2} = -\infty$$

d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+x-3}{x(x-1)^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3+x-3}{x^3-2x^2+x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{6x^2+1}{3x^2-4x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3+x-3}{x^3-2x^2+x} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{6x^2+1}{3x^2-4x+1} = +\infty$$

d'où la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3+x-3}{x(x-1)^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{-\infty}{-\infty}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3+x-3}{x^3-2x^2+x} &\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{6x^2+1}{3x^2-4x+1} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right) \\
&\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{12x}{6x-4} \quad \left(\text{ind. } \frac{-\infty}{-\infty}\right) \\
&\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{12}{6} \\
&= \lim_{x\to -\infty} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

De même, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3+x-3}{x(x-1)^2} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

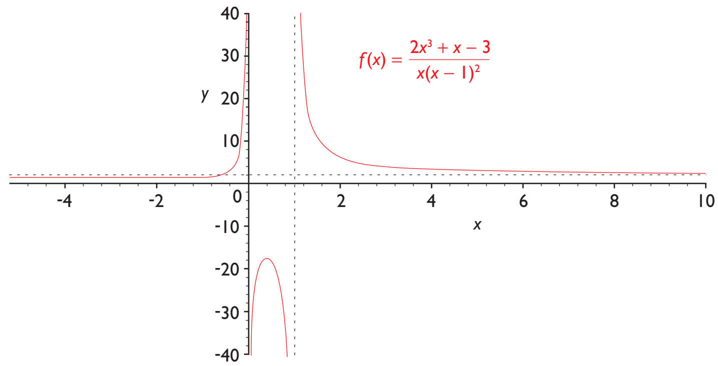
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3+x-3}{x^3-2x^2+x} &\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{6x^2+1}{3x^2-4x+1} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right) \\
&\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{12x}{6x-4} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right) \\
&\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{12}{6} \\
&= \lim_{x\to +\infty} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

d'où la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale.

```
> with(plots):
> f:=x->(2*x^3+x-3)/(x*(x-1)^2);
```

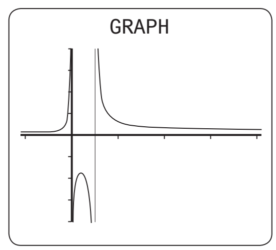
$$f := x \to \frac{2x^3+x-3}{x(x-1)^2}$$

```
> ah:=plot(2,x=-5..10,color=black,linestyle=4):
> av:=plot([1,y,y=-40..40],color=black,linestyle=4):
> c:=plot(f(x),x=-5..10,y=-40..40,color=orange,discont=true):
> display(c,ah,av);
```




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(2X^3+X-3)/
(X((X-1)^2))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-4
Xmax=7
Xscl=2
Ymin=-30
Ymax=30
Yscl=10
Xres=1
```



b) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ sur $]0, +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (\text{ind. } (+\infty)^0)$$

$$A = \lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\begin{aligned}
\ln A &= \ln\left(\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\
&= \lim_{x\to 0^+} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad (\text{ind. } 0 \cdot (+\infty)) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{ind. } \frac{+\infty}{+\infty}\right) \\
&\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $A = e^0 = 1$
d'où aucune asymptote verticale.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad (\text{ind. } 1^{+\infty})$$

$$A = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Par un procédé analogue au calcul précédent, nous obtenons

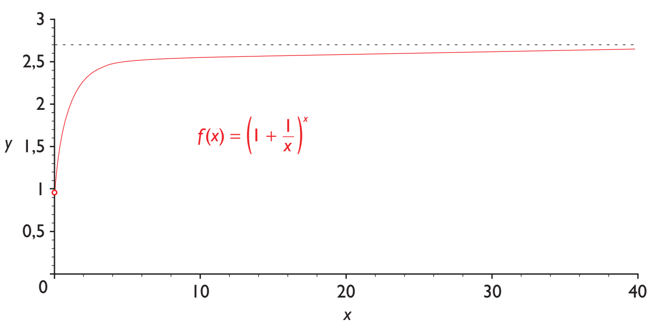
$$\ln A = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

donc $A = e$
d'où la droite d'équation $y = e$ est une asymptote horizontale.

> f:=x->(1+(1/x))^x;

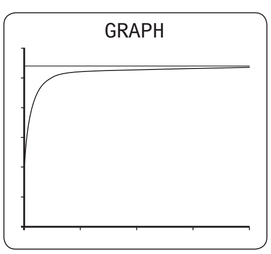
$$f := x \to \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

> plot([f(x),exp(1)],x=0..40,y=0..3,color=[red,black], linestyle=[1,4]);




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■e^(1)
\Y2■(1+(1/X))^X
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=40
Xscl=10
Ymin=0
Ymax=3
Yscl=.5
Xres=1
```



c) $f(x) = \dfrac{x}{2e^x - xe^x - x - 2}$, où dom $f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^x - xe^x - x - 2} \qquad \left(\text{ind. } \frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{2e^x - xe^x - x - 2} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^x - xe^x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x^3 - xe^x - x - 2} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x - xe^x - 1} = -\infty$$

d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

En évaluant $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$, qui est une indétermination de la forme $(-\infty)\cdot 0$, nous obtenons

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \qquad \left(\text{ind. } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}$$

$$= 0$$

ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x - x - 2) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2e^x - xe^x - x - 2} \qquad \left(\text{ind. } \dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2e^x - xe^x - x - 2} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x - xe^x - 1}$$

$$= -1 \qquad \left(\text{car } \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0\right)$$

d'où la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale.

Évaluons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x - xe^x - x - 2) \qquad (\text{ind. } +\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^x - xe^x - x - 2) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(2 - x - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$$

$$= -\infty \qquad \left(\begin{array}{l}\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0 \\ \text{et } +\infty\cdot(-\infty) = -\infty\end{array}\right)$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2e^x - xe^x - x - 2} \qquad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{-\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2e^x - xe^x - x - 2} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x - xe^x - 1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x\left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right)}$$

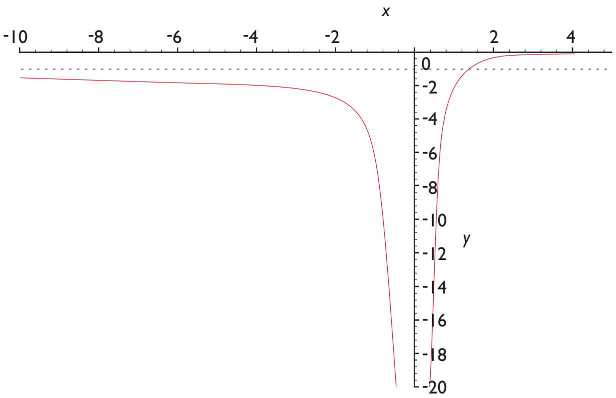
$$= 0$$

d'où la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale.

> with(plots):
> f:=x->x/(2*exp(x)-x*exp(x)-x-2);

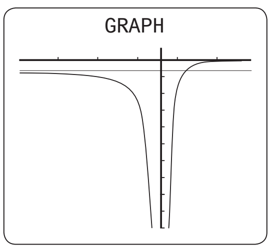
$$f := x \to \frac{x}{2e^x - xe^x - x - 2}$$

> ah:=plot(-1,x=-10..5,color=black,linestyle=4):
> c:=plot(f(x),x=-10..5,y=-20..0,color=orange):
> display(c,ah);




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■X/(2e^(X)-Xe^
(X)-X-2)
\Y2■-1
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-10
Xmax=4
Xscl=2
Ymin=20
Ymax=1
Yscl=2
Xres=1
```



23. a) $N(0) = \dfrac{0 + 2400e^0}{5 + 0 + e^0}$

$= \dfrac{2400}{6} = 400$, d'où 400 truites

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{3t + 2400e^{0,36t}}{5 + t^2 + e^{0,36t}} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$\overset{\text{RH}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{3 + 864e^{0,36t}}{2t + 0,36e^{0,36t}} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$\overset{\text{RH}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{311,04e^{0,36t}}{2 + 0,1296e^{0,36t}} \quad \left(\text{ind. } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$\overset{\text{RH}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{111,9744e^{0,36t}}{0,046\,656e^{0,36t}}$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{111,9744}{0,046\,656}$

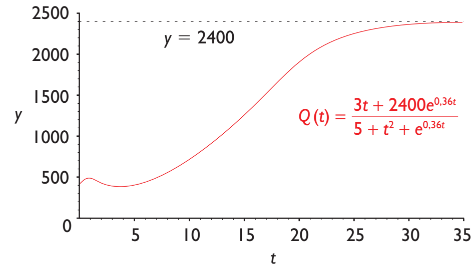
$= 2400$, d'où 2400 truites

c) A.H. : $y = 2400$

```
> with(plots):
> Q:=(3*t+2400*exp(0.36*t))/(t^2+5+exp(0.36*t));
```

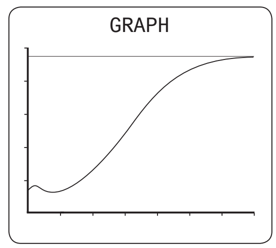
$$Q := \frac{3t + 2400e^{(0.36t)}}{t^2 + 5 + e^{(0.36t)}}$$

```
> c:=plot(Q(t),t=0..36,y=0..2500,color=orange):
> h:=plot(2400,t=0..36,color=black,linestyle=4):
> display(c,h);
```




```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■2400
\Y2■(3X+2400e^
(.36X))/(5+X²+e^
(.36X))
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=35
Xscl=5
Ymin=0
Ymax=2500
Yscl=500
Xres=1
```



24. $x^2 + y^2 = 3,24$

a) Calculons d'abord y'.

$(x^2 + y^2)' = (3,24)'$

$2x + 2yy' = 0$

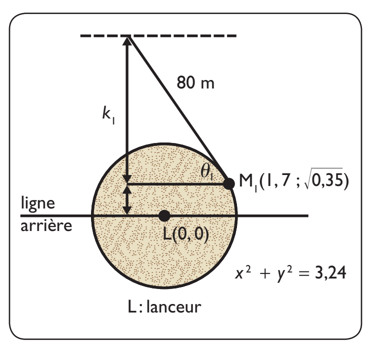
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y}$

Déterminons les coordonnées du point $M_1(1,7\,;b)$ où $b > 0$ si $x = 1,7$

$(1,7)^2 + y^2 = 3,24$

$y^2 = 0,35$

$y = \pm\sqrt{0,35}$, donc $b = \sqrt{0,35}$



$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,7\,;\,\sqrt{0,35})} = \dfrac{-1,7}{\sqrt{0,35}}$

$\tan\theta_1 = \dfrac{1,7}{\sqrt{0,35}}$, ainsi $\theta_1 = \text{Arc tan}\left(\dfrac{1,7}{\sqrt{0,35}}\right)$

$\dfrac{k_1}{80} = \sin\theta_1$

$$k_1 = 80\sin\left(\text{Arc tan}\left(\frac{1{,}7}{\sqrt{0{,}35}}\right)\right) = 75{,}\bar{5}$$

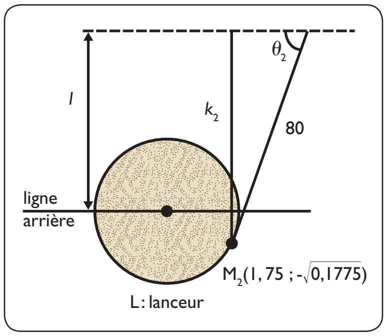
ainsi $l = k_1 + \sqrt{0{,}35} = 75{,}\bar{5} + 0{,}591\ldots$

d'où $l \approx 76{,}15$ mètres

b) Déterminons les coordonnées du point M(1,75 ; b), où $b > 0$ si $x = 1{,}75$

$$(1{,}75)^2 + y^2 = 3{,}24$$
$$y^2 = 0{,}1775$$
$$y = \pm\sqrt{0{,}1775}$$

donc $b = -\sqrt{0{,}1775}$



$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1{,}75\,;\,-\sqrt{0{,}1775})} = \frac{-1{,}75}{-\sqrt{0{,}1775}}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{1{,}75}{\sqrt{0{,}1775}}, \text{ ainsi } \theta_2 = \text{Arc tan}\left(\frac{1{,}75}{\sqrt{0{,}1775}}\right)$$

$$\frac{k_2}{80} = \sin\theta_2$$

$$k_2 = 80\sin\left(\text{Arc tan}\left(\frac{1{,}75}{\sqrt{0{,}1775}}\right)\right) = 77{,}\bar{7}$$

ainsi $l = k_2 - \sqrt{0{,}1775} = 77{,}\bar{7} - 0{,}421\ldots$

d'où $l \approx 77{,}36$ mètres

25. Démontrons, par l'absurde, que f possède au plus une valeur fixe.

Supposons que f possède deux valeurs fixes distinctes, a et b, c'est-à-dire $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

En appliquant le théorème de Lagrange à f sur $[a, b]$, $\exists\, c \in\,]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$= \frac{b - a}{b - a} \quad (\text{car } f(b) = b \text{ et } f(a) = a)$$
$$= 1$$

ce qui contredit l'hypothèse.
D'où f possède au plus une valeur fixe.

26. a) Démontrons, par l'absurde, que f a au plus $(k + 1)$ zéros distincts.

Supposons que f a $(k + 2)$ zéros distincts : $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{k+2}$.

En appliquant le théorème de Rolle à f sur chaque intervalle $[z_1, z_2], [z_2, z_3], \ldots, [z_{k+1}, z_{k+2}]$, alors

$\exists\, c_1 \in\,]z_1, z_2[$ tel que $f'(c_1) = 0$

$\exists\, c_2 \in\,]z_2, z_3[$ tel que $f'(c_2) = 0$

$\vdots$

$\exists\, c_{k+1} \in\,]z_{k+1}, z_{k+2}[$ tel que $f'(c_{k+1}) = 0$;

donc f' possède $(k + 1)$ zéros distincts, ce qui contredit l'hypothèse.

D'où f a au plus $(k + 1)$ zéros distincts.

b) Puisque f' a k zéros distincts,
alors f'' a au plus $(k + 1)$ zéros distincts (par a))
d'où f a au plus $(k + 2)$ zéros distincts (par a))

c) Puisque $f^{(n)}$ a k zéros distincts,
alors $f^{(n-1)}$ a au plus $(k + 1)$ zéros distincts (par a))
$f^{(n-2)}$ a au plus $(k + 2)$ zéros distincts (par a))
$\vdots$
d'où f a au plus $(k + n)$ zéros distincts (par a))